

# 目 錄

## 第一章 拉卜拉士變換 1

1. 拉卜拉士變換之定義 1 / 2. 記號表示法 1 / 3. 一些基本函  
數的拉氏變換 1 / 4. 分段連續性 2 / 5. 指數級函數 3 / 6.  
拉氏變換存在的充分條件 3 / 7. 拉氏變換的一些重要性質 3 /  
8. 計算拉氏變換的方法 9 / 9. 積分的計算 9 / 10. 一些特殊函  
數 10 / 11. 特殊函數的拉氏轉換 13 / 附解題 15 / 補充題  
38

## 第二章 反拉卜拉士變換 53

1. 反拉卜拉士變換的定義 53 / 2. 反拉卜拉士變換的唯一性 ( 勒契  
定理 ) 53 / 3. 一些反拉氏變換 54 / 4. 反拉氏變換的一些性質  
54 / 5. 計算反拉氏變換的方法 58 / 6. 黑佛塞展開公式 59  
/ 7. 貝他函數 59 / 8. 積分的計算 60 / 附解題 60 / 補充  
題 84

## 第三章 在微分方程式方面的應用 95

1. 常係數常微分方程式 95 / 2. 變係數常微分方程式 95 / 3.  
聯立常微分方程式 96 / 4. 在力學方面的應用 96 / 5. 在電路方  
面的應用 97 / 6. 橫樑方面的應用 98 / 7. 偏微分方程式 99  
/ 附解題 99 / 補充題 124

## 第四章 積分及差分方程式方面的應用 137

1. 積分方程式 137 / 2. 褶積型的積分方程式 137 / 3. 阿貝爾  
積分方程式, 等時問題 138 / 4. 積分微分方程式 138 / 5. 差  
分方程式 138 / 6. 微分差分方程式 139 / 附解題 139 /  
補充題 158

## 第五章 複變理論 167

1. 複數係 167 / 2. 複數的極式 167 / 3. 極式的運算，棣馬弗定理 168 / 4. 複數的根 169 / 5. 函數 169 / 6. 極限及連續性 169 / 7. 導式 170 / 8. 柯西-里曼方程式 171 / 9. 線積分 171 / 10. 平面上的革忍定理 172 / 11. 積分 172 / 12. 柯西定理 172 / 13. 柯西積分公式 173 / 14. 泰勒級數 173 / 15. 奇點 174 / 16. 極點 174 / 17. 洛丹級數 175 / 18. 留數 175 / 19. 留數定理 176 / 20. 定積分的計算 176 / 附解題 177 / 補充題 206

## 第六章 傅立葉級數及積分 215

1. 傅立葉級數 215 / 2. 奇函數及偶函數 215 / 3. 半幅傅氏正弦及餘弦級數 216 / 4. 傅氏級數的複數形式 216 / 5. 傅氏級數的巴塞維恒等式 217 / 6. 有限傅氏變換 217 / 7. 傅氏積分 218 / 8. 傅氏積分的複數形式 218 / 9. 傅立葉變換 219 / 10. 傅立葉正弦及餘弦變換 219 / 11. 褶積定理 220 / 12. 傅氏積分中的巴塞維恒等式 220 / 13. 傅氏變換和拉氏變換的關係 220 / 附解題 221 / 補充題 241

## 第七章 複數反變換公式 249

1. 複數反變換公式 249 / 2. 布拉威齊路徑 249 / 3. 利用留數定理求反拉氏變換 250 / 4. 沿  $\Gamma$  的積分值趨近於零的充分條件 250 / 5. 碰到分枝點時，布拉威齊路徑的修改 250 / 6. 具有無限多個奇點的情形 251 / 附解題 251 / 補充題 265

## 第八章 在邊界值問題方面的應用 271

1. 和偏微分方程式有關的邊界值問題 271 / 2. 某些重要的偏微分方程式 271 / 3. 二維及三維的問題 273 / 4. 以拉卜拉士變換解邊界值問題 274 / 習題與解答 274 / 補充題 291

## 附錄A 拉卜拉士變換的一般性質表 301

附錄 B 拉卜拉士變換表 303

附錄 C 特殊函數表 313

索 引 315

# 第一章

## 拉卜拉士變換

### 1.1 拉卜拉士變換之定義

令  $F(t)$  爲一對  $t \geq 0$  所定義的函數，則  $F(t)$  的拉卜拉士變換 (Laplace transform, 以下簡稱“拉氏變換”) 可寫成  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ ，其定義如下

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \quad (1)$$

在上式中，我們暫時限定參數  $s$  爲實數。往後的討論中，我們會發現如果把  $s$  值延伸至複數，相當有用。

若(1)式對某些特定的  $s$  值會收斂 (converges)，則我們稱  $F(t)$  的拉氏轉換存在 (Exist)，否則，即稱不存在。拉氏變換存在的充分條件，請參見第 2 頁。

### 1.2 記號表示法

如果我們以大寫字母來表示  $t$  的函數，如  $F(t)$ ， $G(t)$ ， $Y(t)$  等，則其對應的拉氏變換式，我們以相對的小寫字母表示，即  $f(s)$ ， $g(s)$ ， $y(s)$  等。此外，“ $\sim$ ” (Tilde) 亦可用來表示拉氏變換，如  $u(t)$  的拉氏變換即可寫爲  $\tilde{u}(s)$ 。

### 1.3 一些基本函數的拉氏變換

下表爲部份基本函數的拉氏變換，均可由(1)式計算求得，請參考第 1 及第 2 題。在附錄 B 中，有更詳細的拉氏變換表。



	$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
1.	1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
2.	$t$	$\frac{1}{s^2} \quad s > 0$
3.	$t^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$ 註： $n$ 階乘 $= n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ 且由定義， $0! = 1$
4.	$e^{at}$	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
5.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
7.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s >  a $
8.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s >  a $

#### 1.4 分段連續性

函數  $F(t)$  在  $\alpha \leq t \leq \beta$  有定義，且區間  $\alpha \leq t \leq \beta$  可分割為有限個子區間，若  $F(t)$  在這些子區間中均為連續，且其左右端點的極限值均是有限值，則我們稱函數  $F(t)$  在區間  $\alpha \leq t \leq \beta$  為分段連續 (Sectionally continuous or piecewise continuous)。

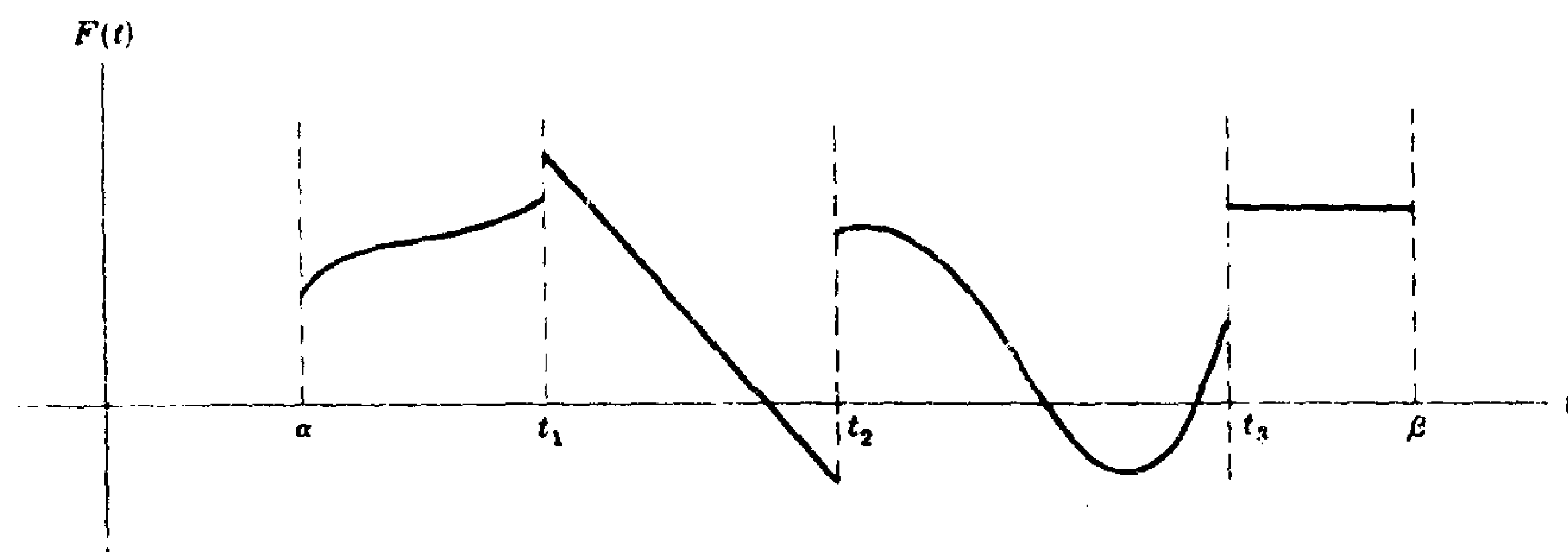


圖 1-1

上面的圖 1-1，即為分段連續函數的一個例子。此函數在  $t_1, t_2, t_3$  均不連續，以  $t_2$  而言，其左右端點的極限值分別是  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(t_2 - \epsilon) = F(t_2 - 0) = F(t_2 -)$  及  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(t_2 + \epsilon) = F(t_2 + 0) = F(t_2 +)$ ，其中  $\epsilon$  為正數。

### 1.5 指數級函數

若存在一實常數  $M > 0$  及一數  $\gamma$ ，使得對於所有  $t > N$  時，有

$$|e^{-\gamma t} F(t)| < M \quad \text{或} \quad |F(t)| < M e^{\gamma t}$$

則我們稱“在  $t \rightarrow \infty$  時， $F(t)$  為  $\gamma$  指數級函數 (Function of exponential order  $\gamma$  as  $t \rightarrow \infty$ )”，或簡單地說， $F(t)$  是指數級 (Exponential order)。

#### 例題 1.1

$F(t) = t^2$  為 3 指數級 (舉例而言)，因為對所有  $t > 0$ ， $|t^2| = t^2 < e^{3t}$ 。

#### 例題 1.2

$F(t) = e^{t^3}$  不是指數級函數，因為我們可經由  $t$  之增大，而使得  $|e^{-\gamma t} e^{t^3}| = e^{t^3 - \gamma t}$  大於任一給定之正數。

直覺上來看，當  $t$  增大時，指數級函數絕對值的增大速度不會比  $M e^{\gamma t}$  來得快，但這在實際狀況並不會造成任何限制，因  $M$  和  $\gamma$  的大小可任意選定。

有界函數，如  $\sin at$  或  $\cos at$ ，均為指數級函數。

### 1.6 拉氏變換存在的充分條件

**定理 1-1:** 若  $F(t)$  在每個有限區  $0 \leq t \leq N$  均是分段連續，且在  $t > N$  時， $F(t)$  為  $\gamma$  指數級，則對於所有  $s > \gamma$ ，其拉氏變換  $f(s)$  存在。

此定理之證明請參見 47 題。但必須強調的是，以上只是拉氏變換存在的充分條件，若不符合上述條件，則拉氏變換可能存在，也可能不存在 (請參見 32 題)。故上述條件並非拉氏變換存在的必要條件。

其他充分條件，請參見 145 題。

### 1.7 拉氏變換的一些重要性質

在以下的定理中，假設所有函數均滿足定理 1-1 的條件 (除非另有說明)，故所有函數的拉氏變換均存在。

## 1. 線性性質

**定理 1-2:** 若  $c_1, c_2$  為任意常數, 且  $F_1(s), F_2(s)$  分別是  $F_1(t), F_2(t)$  的拉氏變換, 則

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) \quad (2)$$

此結論可輕易地推廣至兩個函數以上。

## 例題 1.3

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} &= 4\mathcal{L}\{t^2\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ &= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 5\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1} \end{aligned}$$

將  $F(t)$  變換成  $f(s)$  的符號  $\mathcal{L}$ , 又稱為“拉氏變換運算子”(Laplace transformation operator)。由於  $\mathcal{L}$  滿足上述定理, 所以我們又稱之為線性運算子 (Linear operator), 或是說它具有線性性質 (Linearity property)。

## 2. 第一平移性質

**定理 1-3:** 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ , 則

$$\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s-a) \quad (3)$$

## 例題 1.4

因  $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$ , 故

$$\mathcal{L}\{e^{-t} \cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

## 3. 第二平移性質

**定理 1-4:** 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ , 且  $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$ , 則

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s) \quad (4)$$

例題 1.5:

因  $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$ ，故函數

$$G(t) = \begin{cases} (t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

的拉氏變換  $6e^{-2s}/s^4$ 。

#### 4. 標度改變性質

定理 1.5: 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (5)$$

例題 1.6:

因  $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ ，故

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{1}{3} \frac{1}{(s/3)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

#### 5. 導式之拉氏轉換

定理 1.6: 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$  則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) \quad (6)$$

但上述定理之成立需滿足下列條件：第一  $F(t)$  在  $0 \leq t \leq N$  之間為連續，且在  $t > N$  時， $F(t)$  為指數級。第二， $F'(t)$  在  $0 \leq t \leq N$  之間為分段連續。

例題 1.7:

若  $F(t) = \cos 3t$ ，則  $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{s}{s^2+9}$  故

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\{-3 \sin 3t\} = s\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

此方法在求拉氏轉換式時可免去積分麻煩。(參見 15 題)

定理 1.7: 在定理 1.6 中，若  $F(t)$  在  $t = 0$  時不連續，但  $\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = F(0+)$  值存

在 (此值不一定等於  $F(0)$ ，因  $F(0)$  可能不存在)，則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0+) \quad (7)$$

**定理 1.8:** 在定理 1.6 中，若  $F(t)$  在  $t = a$  時不連續，則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) - e^{-as}\{F(a+) - F(a-)\} \quad (8)$$

其中  $F(a+) - F(a-)$  的值，我們稱為在不連續點  $t = a$  的躍斷 (Jump)。若有更多不連續點，可依此法一一修正。

**定理 1.9:** 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0) \quad (9)$$

此定理之成立亦需滿足：第一， $F(t)$  和  $F'(t)$  在  $0 \leq t \leq N$  時均連續，且在  $t > N$  時均為指數級，第二， $F''(t)$  在  $0 \leq t \leq N$  時為分段連續。

若  $F(t)$  和  $F'(t)$  有不連續點，可依定理 1.7 及 1.8 來修正 (9) 式。

**定理 1.10:** 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0) \quad (10)$$

此定理之成立亦需滿足：第一， $F(t), F'(t) \cdots F^{(n-1)}(t)$  在  $0 \leq t \leq N$  時均連續，且  $t > N$  時均為指數級，第二， $F^{(n)}(t)$  在  $0 \leq t \leq N$  時為分段連續。

## 6. 積分式之拉氏變換

**定理 1.11:** 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = \frac{f(s)}{s} \quad (11)$$

**例題 1.8:**

因  $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}$ ，我們可直接得到

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin 2u du\right\} = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

7. 乘以  $t^n$ 

定理 1.12 : 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$  , 則

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s) \quad (12)$$

例題 1.9 :

因爲  $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$  , 故

$$\mathcal{L}\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

8. 除以  $t$ 

定理 1.13 : 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$  , 則

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u) du \quad (13)$$

在此須先確定  $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)/t$  存在。

例題 1.10 :

因爲  $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$  且  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  , 所以

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(1/s)$$

## 9. 週期函數

定理 1.14 : 若  $F(t)$  有週期  $T > 0$  使得  $F(t+T) = F(t)$  (見圖 1-2) ,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

則

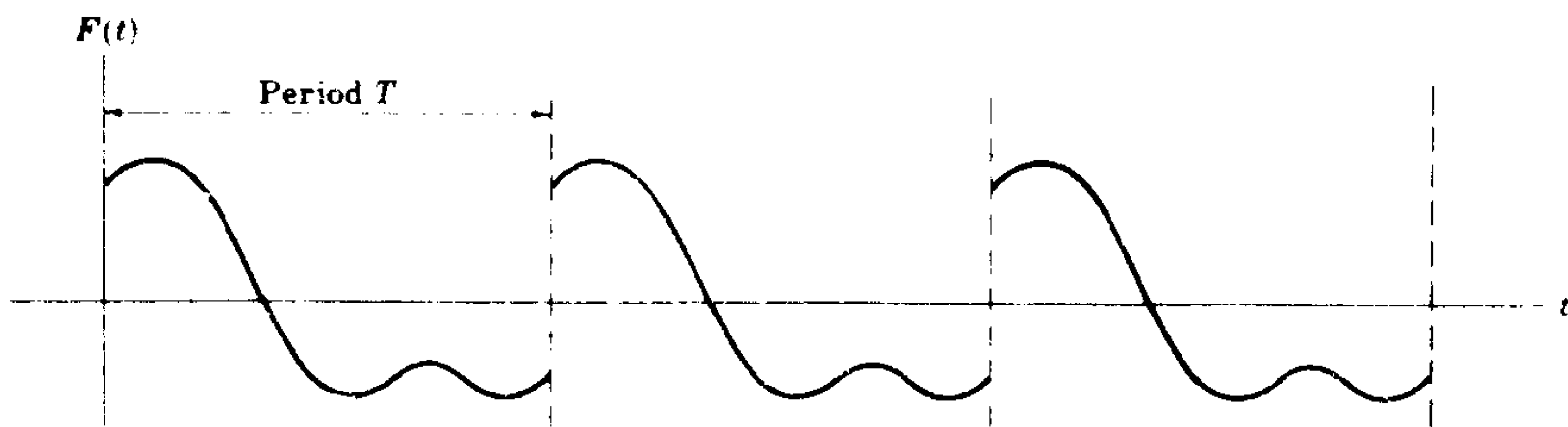


圖 1-2

### 10. $s \rightarrow \infty$ 時， $f(s)$ 之極限值

定理 1.15：若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0 \quad (15)$$

### 11. 初值定理

定理 1.16：假設以下之極限值均存在，則

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s f(s) \quad (16)$$

### 12. 終值定理

定理 1.17：若以下之極限值均存在，則

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s) \quad (17)$$

### 13. 初值定理之推廣

若  $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)/G(t) = 1$ ，則在  $t$  值很小時， $F(t)$  和  $G(t)$  的值很相近，我們寫成“當  $t \rightarrow 0$  時， $F(t) \sim G(t)$ ”。

同理，若  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s)/g(s) = 1$ ，則在  $s$  很大時， $f(s)$  和  $g(s)$  的值很相近，我們寫成“當  $s \rightarrow \infty$  時， $f(s) \sim g(s)$ ”。

在此可將定理 1.16 推廣如下

定理 1.18：若當  $t \rightarrow 0$  時， $F(t) \sim G(t)$ ，則當  $s \rightarrow \infty$  時， $f(s) \sim g(s)$ ，其中

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}, g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}.$$

#### 14. 終值定理之推廣

若  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)/G(t) = 1$ ，我們寫成“當  $t \rightarrow \infty$  時， $F(t) \sim G(t)$ ”。同理若  $\lim_{s \rightarrow 0} f(s)/g(s) = 1$ ，寫成“當  $s \rightarrow 0$  時， $f(s) \sim g(s)$ ”，由此可得定理 1.17 的推廣。

### 1.8 計算拉氏變換的方法

以下之方法均可用於計算拉氏變換

1. 直接計算：直接由定義(1)計算出。
2. 級數法：若  $F(t)$  可化為冪級數展開如下

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (18)$$

則其拉氏變換可由等式右方級數逐項變換，然後相加而得之，故

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2! a_2}{s^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{s^{n+1}} \quad (19)$$

但此法須保證在  $s > r$  (19) 式必能收斂時方為有效。參見 34, 36, 39 及 48 題。

3. 微分方程式法：找到滿足  $F(t)$  的微分方程式，再使用前述定理即可求得。參見 34 及 48 題。
4. 對某參數微分：參見第 20 題。
5. 其他方法：須用到各定理中較特殊的方法。例如定理 1.13。
6. 查表法：(見附錄)。

### 1.9 積分的計算

若  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ ，則

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s) \quad (20)$$

令  $s \rightarrow 0$ ，可得



$$\int_0^{\infty} F(t) dt = f(0) \quad (21)$$

在此假設其積分均為收斂。

在計算積分時，(20)及(21)式非常有用。見45及46題。

## 1.10 一些特殊函數

### 1. 伽瑪函數

若  $n > 0$ ，定義伽瑪函數 (Gamma function)

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du \quad (22)$$

以下是伽瑪函數的一些重要性質

$$1. \quad \Gamma(n+1) = n \Gamma(n), \quad n > 0$$

因  $\Gamma(1)=1$ ，故  $\Gamma(2)=1$ ， $\Gamma(3)=2!=2$ ， $\Gamma(4)=3!$ ，推廣得  $\Gamma(n+1)=n!$  ( $n$  為正整數)，故此函數又稱階乘函數 (Factorial function)。

$$2. \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$3. \quad \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$$

4.  $n$  很大時，

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

上式稱為司徒令公式 (Stirling's formula)。註：“ $\sim$ ”表示“在  $n$  很大時，約略相等”，更精確地說若  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n)/G(n) = 1$ ，則  $F(n) \sim G(n)$ 。

5.  $n < 0$ ， $\Gamma(n)$  可定義為

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

### 2. 貝色函數

定義  $n$  階的貝色函數 (Bessel function of order  $n$ ) 如下

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots \right\} \quad (23)$$

其重要性質為

1.  $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$  ,  $n$  為正整數
2.  $J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$
3.  $\frac{d}{dt} \{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$  . 若  $n=0$  , 可得  $J_0'(t) = -J_1(t)$ .
4.  $e^{\frac{1}{2}t(u-1/u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) u^n$

此稱為貝色函數的形成函數 (Generating function)

5.  $J_n(t)$  滿足貝色微分方程式 (Bessel's differential equation)

$$t^2 Y''(t) + t Y'(t) + (t^2 - n^2) Y(t) = 0$$

可定義  $J_n(it) = i^{-n} I_n(t)$  , 其中  $I_n(t)$  稱修正的  $n$  階貝色函數 (Modified Bessel function of order  $n$ ) 。

### 3. 誤差函數

定義為

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \quad (24)$$

### 4. 餘誤差函數

定義為

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2} du \quad (25)$$

### 5. 正弦及餘弦積分

定義為

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \quad (26)$$

$$\operatorname{Ci}(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du \quad (27)$$

## 6. 指數積分

定義為

$$\text{Ei}(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (28)$$

## 7. 單位階梯函數

亦稱為黑佛塞單位函數 (Heaviside's unit function)，定義為

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \quad (29)$$

見圖 1-3。

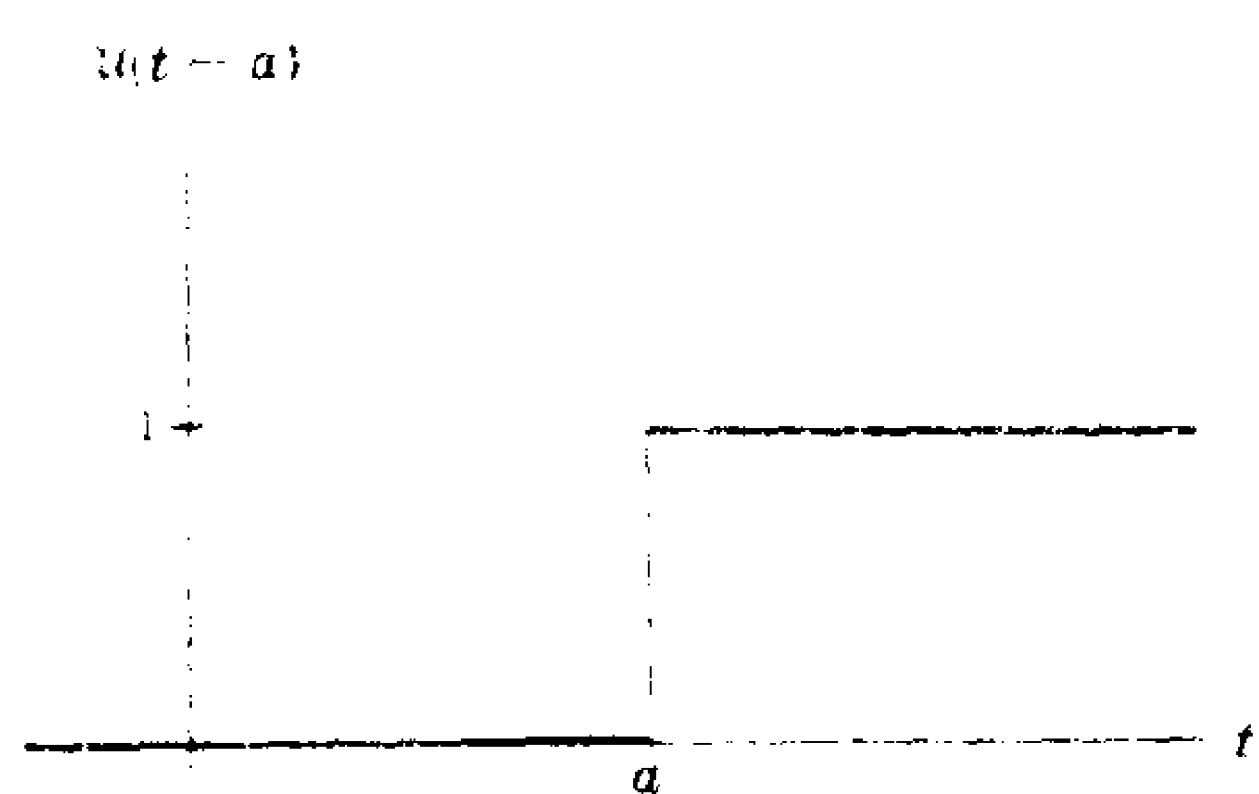


圖 1-3

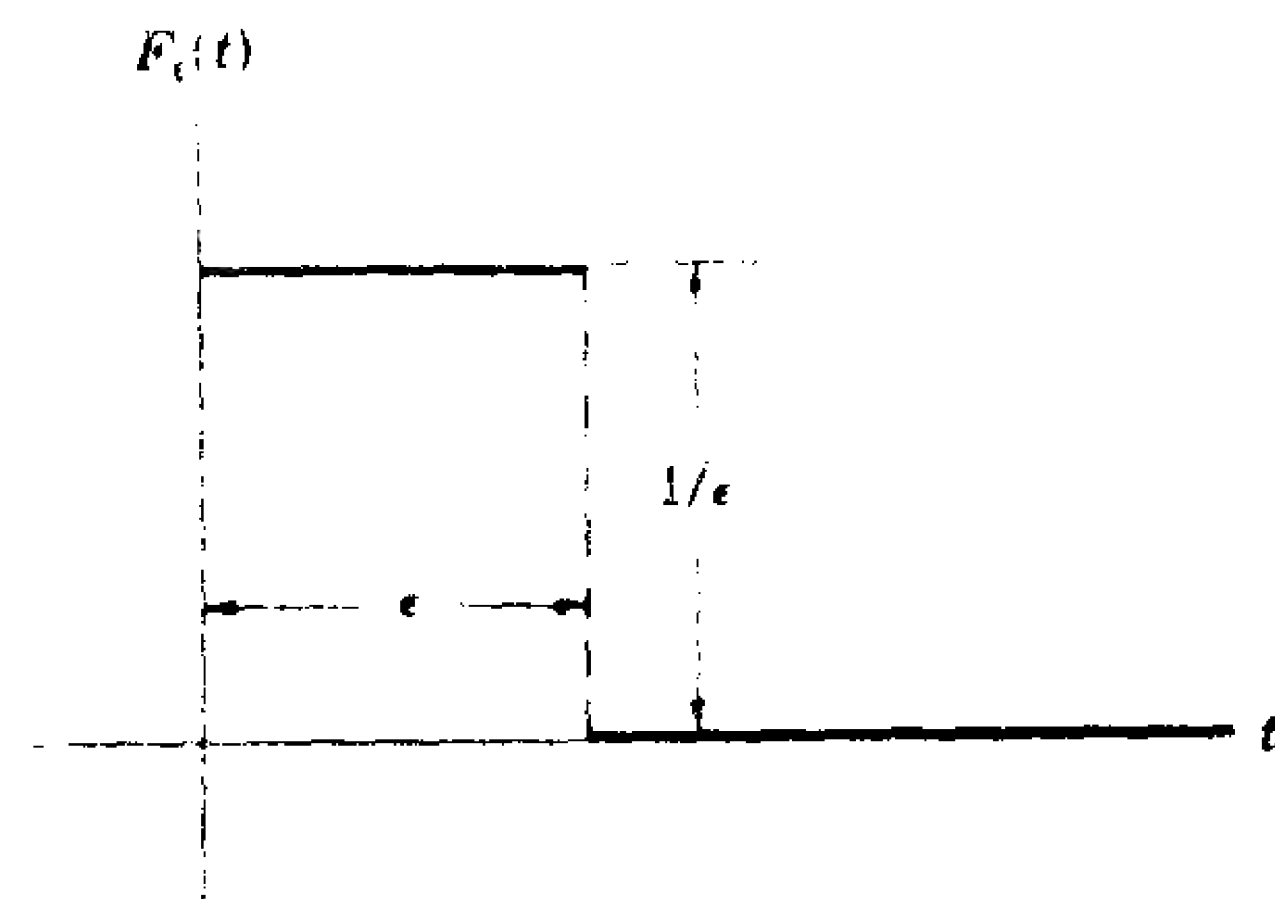


圖 1-4

## 8. 單位脈衝函數或狄瑞克三角形函數

考慮下列函數

$$F_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases} \quad (30)$$

其中  $\epsilon > 0$ ，其圖形見圖 1-4。

從圖中可明顯看出，當  $\epsilon \rightarrow 0$  時，圖形的高度增大，寬度減小，但其面積保持為

1，即  $\int_0^\infty F_\epsilon(t) dt = 1$ 。

此觀念使得工程師和物理學家想到一個極限情形下的函數，記為  $\delta(t)$ ，這是在

198304-1814

$\epsilon \rightarrow 0$  時，由  $F_\epsilon(t)$  逼近而得的函數。我們稱  $\delta(t)$  為單位脈衝函數 (Unit impulse function) 或狄瑞克三角形函數 (Dirac delta function)，其重要性質如下：

1.  $\int_0^\infty \delta(t) dt = 1$
2.  $\int_0^\infty \delta(t) G(t) dt = G(0)$  其中  $G(t)$  為任意之連續函數
3.  $\int_0^\infty \delta(t-a) G(t) dt = G(a)$  其中  $G(t)$  為任意之連續函數

雖然在數學上來說，這種函數並不存在，然而其運算或操作均可經嚴密之定義而達成。

## 9. 無積函數

若對於所有  $t > 0$

$$\int_0^t \mathcal{N}(u) du = 0 \quad (31)$$

則稱  $\mathcal{N}(t)$  為無積函數 (Null function)

例題 1.11

$$F(t) = \begin{cases} 1 & t = 1/2 \\ -1 & t = 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \text{即為無積函數}$$

一般來說，任何函數若只在某些可數的特定點（即能與自然數 1, 2, 3... 一對一相對應的一組點）有不為零的對應值，且在其他區域均為零，則這就是一個無積函數。

## 1.11 特殊函數的拉氏轉換

以下為某些特殊函數的拉氏轉換。更詳盡的表格可參見附錄 B。

特殊函數的拉氏變換表

	$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
1.	$t^n$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ 若 $n=0, 1, 2, \dots$ , 則此 式即為第 1 項的第 3 條
2.	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
3.	$J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^n}{a^n \sqrt{s^2 + a^2}}$
4.	$\sin \sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-1/4s}$
5.	$\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-1/4s}$

特殊函數的拉氏變換表 (續前)

	$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
6.	$\operatorname{erf}(t)$	$\frac{e^{s^2/4}}{s} \operatorname{erfc}(s/2)$
7.	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$
8.	$\operatorname{Si}(t)$	$\frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}$
9.	$\operatorname{Ci}(t)$	$\frac{\ln(s^2 + 1)}{2s}$
10.	$\operatorname{Ei}(t)$	$\frac{\ln(s+1)}{s}$
11.	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
12.	$\delta(t)$	1
13.	$\delta(t-a)$	$e^{-as}$
14.	$\mathcal{N}(t)$	0

## 附解題

## 基本函數的拉氏轉換

1.1 證明：(a)  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ ,  $s > 0$ ; (b)  $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ ,  $s > 0$ ; (c)  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ ,  $s > a$ .

$$\begin{aligned} \text{證 (a)} \quad \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(1) dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st} dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^P = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-sP}}{s} = \frac{1}{s} \text{ 其中 } s > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(t) dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P t e^{-st} dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left( t \left( \frac{e^{-st}}{-s} \right) - (1) \left( \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \right) \Big|_0^P = \lim_{P \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sP}}{s^2} - \frac{Pe^{-sP}}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s^2} \text{ 其中 } s > 0 \end{aligned}$$

其中我們用到部分積分。

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(e^{at}) dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-(s-a)t} dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^P = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-(s-a)P}}{s-a} = \frac{1}{s-a} \text{ 其中 } s > a \end{aligned}$$

不用直接積分的解法，見第15題。

1.2 證明：(a)  $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$ , (b)  $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$  其中  $s > 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{證 (a)} \quad \mathcal{L}\{\sin at\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st} \sin at dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}(-s \sin at - a \cos at)}{s^2 + a^2} \right|_0^P \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a}{s^2 + a^2} - \frac{e^{-sP}(s \sin aP + a \cos aP)}{s^2 + a^2} \right\} \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2} \text{ 其中 } s > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \mathcal{L}\{\cos at\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st} \cos at dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}(-s \cos at + a \sin at)}{s^2 + a^2} \right|_0^P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{e^{-sP} (s \cos aP - a \sin aP)}{s^2 + a^2} \right\} \\
&= \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{其中 } s > 0
\end{aligned}$$

以上引用到下列等式

$$\int e^{\alpha t} \sin \beta t \, dt = \frac{e^{\alpha t} (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (1)$$

$$\int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt = \frac{e^{\alpha t} (\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (2)$$

另解：假設第1題(c)的結果對複數亦成立（可證明），則

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{1}{s - ia} = \frac{s + ia}{s^2 + a^2} \quad (3)$$

但  $e^{iat} = \cos at + i \sin at$ ，故

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{iat}\} &= \int_0^\infty e^{-st} (\cos at + i \sin at) \, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \cos at \, dt + i \int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt = \mathcal{L}\{\cos at\} + i \mathcal{L}\{\sin at\} \quad (4)
\end{aligned}$$

由(3)及(4)，將實部及虛部分別對應相等，得

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

1.3 證明：(a)  $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$ ，(b)  $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$  其中  $s > |a|$ 。

$$\begin{aligned}
\text{圖 (a)} \quad \mathcal{L}\{\sinh at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} dt \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-at}\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \text{其中 } s > |a|
\end{aligned}$$

另解：利用拉氏變換的線性性質，可立刻算出答案。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \text{其中 } s > |a|\end{aligned}$$

(b)如同(a),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad \text{其中 } s > |a|\end{aligned}$$

1.4 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ , 其中  $F(t) = \begin{cases} 5 & 0 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$

答 由定義,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = \int_0^3 e^{-st} (5) dt + \int_3^\infty e^{-st} (0) dt \\ &= 5 \int_0^3 e^{-st} dt = 5 \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^3 = \frac{5(1 - e^{-3s})}{s}\end{aligned}$$

### 線性性質

1.5 證明線性性質 [ 定理 1.2 ]。

答 令  $\mathcal{L}\{F_1(t)\} = f_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} F_1(t) dt$  且  $\mathcal{L}\{F_2(t)\} = f_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} F_2(t) dt$ .

若  $c_1$  及  $c_2$  為任意常數, 則

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} F_1(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} F_2(t) dt \\ &= c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} \\ &= c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\end{aligned}$$

此結果可輕易推廣之。(見 61 題)

1.6 求  $\mathcal{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\}$ .

答 由線性性質 (第 5 題), 可得



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\} &= 4\mathcal{L}\{e^{5t}\} + 6\mathcal{L}\{t^3\} - 3\mathcal{L}\{\sin 4t\} + 2\mathcal{L}\{\cos 2t\} \\
&= 4\left(\frac{1}{s-5}\right) + 6\left(\frac{3!}{s^4}\right) - 3\left(\frac{4}{s^2+16}\right) + 2\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \\
&= \frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{12}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+4}
\end{aligned}$$

其中  $s > 5$ 。

### 平移及標度改變性質

1.7 證明平移性質：若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則  $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$ 。

證 由定義 
$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t) dt = f(s)$$

故

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at}F(t)\} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t) dt = f(s-a)
\end{aligned}$$

1.8 求 (a)  $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 4t\}$ , (c)  $\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\}$ , (d)  $\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\}$

證 (a)  $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$  故  $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\} = \frac{2}{(s-3)^3}$ 。

(b)  $\mathcal{L}\{\sin 4t\} = \frac{4}{s^2+16}$  故  $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 4t\} = \frac{4}{(s+2)^2+16} = \frac{4}{s^2+4s+20}$ 。

(c)  $\mathcal{L}\{\cosh 5t\} = \frac{s}{s^2-25}$  故  $\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\} = \frac{s-4}{(s-4)^2-25} = \frac{s-4}{s^2-8s-9}$ 。

另解：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\} &= \mathcal{L}\left\{e^{4t}\left(\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{9t}+e^{-t}\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-9}+\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{s-4}{s^2-8s-9}
\end{aligned}$$

(d)  $\mathcal{L}\{3\cos 6t - 5\sin 6t\} = 3\mathcal{L}\{\cos 6t\} - 5\mathcal{L}\{\sin 6t\}$

$$= 3\left(\frac{s}{s^2+36}\right) - 5\left(\frac{6}{s^2+36}\right) = \frac{3s-30}{s^2+36}$$

故  $\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\} = \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36} = \frac{3s-24}{s^2+4s+40}$

1.9 證明第二平移性質。

若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$  且  $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$ , 則  $\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{證} \quad \mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} G(t) dt = \int_0^a e^{-st} G(t) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} G(t) dt \\
 &= \int_0^a e^{-st} (0) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} F(t-a) dt \\
 &= \int_a^{\infty} e^{-st} F(t-a) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)} F(u) du \\
 &= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-su} F(u) du \\
 &= e^{-as} f(s)
 \end{aligned}$$

其中用到變數代換  $t = u + a$ 。

1.10 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  其中  $F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & t > 2\pi/3 \\ 0 & t < 2\pi/3 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{證 解 1 : } \mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^{2\pi/3} e^{-st} (0) dt + \int_{2\pi/3}^{\infty} e^{-st} \cos(t - 2\pi/3) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+2\pi/3)} \cos u du \\
 &= e^{-2\pi s/3} \int_0^{\infty} e^{-su} \cos u du = \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+1}
 \end{aligned}$$

解 2 : 因為  $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$ , 由第 9 題, 代入  $a = \frac{2\pi}{3}$ , 可得

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+1}$$

1.11 證明標度改變性質: 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ , 則  $\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{證} \quad \mathcal{L}\{F(at)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} F(at) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-s(u/a)} F(u) d(u/a) \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-su/a} F(u) du \\
 &= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)
 \end{aligned}$$

## 20 第一章 拉卜拉士變換

其中用到變數代換  $t = u/a$ 。

1.12 已知  $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}(1/s)$ , 求  $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ .

證 由第11題  $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\} = \frac{1}{a} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\{1/(s/a)\} = \frac{1}{a} \tan^{-1}(a/s)$

故  $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \tan^{-1}(a/s)$ .

### 導式的拉氏變換

1.13 證明定理 1.6 : 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ , 則  $\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$ .

證 利用部分積分, 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F'(t) dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st} F'(t) dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ e^{-st} F(t) \Big|_0^P + s \int_0^P e^{-st} F(t) dt \right\} \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ e^{-sP} F(P) - F(0) + s \int_0^P e^{-st} F(t) dt \right\} \\ &= s \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt - F(0) \\ &= sf(s) - F(0)\end{aligned}$$

因在  $t \rightarrow \infty$  時,  $F(t)$  為  $\gamma$  指數級, 故在  $s > \gamma$  時  $\lim_{P \rightarrow \infty} e^{-sP} F(P) = 0$   
若  $F(t)$  在  $t = 0$  時不連續, 則可參見問題 68。

1.14 證明定理 1.9, 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$  則  $\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$ .

證 由第13題,

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s \mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = sg(s) - G(0)$$

令  $G(t) = F'(t)$ , 則

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F''(t)\} &= s \mathcal{L}\{F'(t)\} - F'(0) \\ &= s[s \mathcal{L}\{F(t)\} - F(0)] - F'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \\ &= s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)\end{aligned}$$

高階導式的計算, 可用數學歸納法證明 (見第 65 題)。

1.15 利用定理 1.6, 導出下列等式:

$$(a) \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad (b) \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad (c) \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

證 在非例外情況下，定理 1-6 即簡述下列等式

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0) \quad (1)$$

(a) 令  $F(t) = 1$ ，則  $F'(t) = 0$ ， $F(0) = 1$ ，故(1)變為

$$\mathcal{L}\{0\} = 0 = s\mathcal{L}\{1\} - 1 \quad \text{或} \quad \mathcal{L}\{1\} = 1/s \quad (2)$$

(b) 令  $F(t) = t$ ，則  $F'(t) = 1$ ， $F(0) = 0$ ，利用(a)代入(1)式，得

$$\mathcal{L}\{1\} = 1/s = s\mathcal{L}\{t\} - 0 \quad \text{或} \quad \mathcal{L}\{t\} = 1/s^2 \quad (3)$$

由數學歸納法，可證明  $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$  其中  $n$  為正整數。

(c) 令  $F(t) = e^{at}$ ，則  $F'(t) = ae^{at}$ ， $F(0) = 1$ ，故(1)變為

$$\mathcal{L}\{ae^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1, \quad \text{i.e.} \quad a\mathcal{L}\{e^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1 \quad \text{or} \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$$

1.16 利用定理 1-9 證明  $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$ .

證 令  $F(t) = \sin at$ ，則  $F'(t) = a \cos at$ ， $F''(t) = -a^2 \sin at$ ， $F(0) = 0$ ， $F'(0) = a$ 。  
故由

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{F(t)\} - sF(0) - F'(0)$$

$$\text{可得} \quad \mathcal{L}\{-a^2 \sin at\} = s^2\mathcal{L}\{\sin at\} - s(0) - a$$

$$\text{即} \quad -a^2\mathcal{L}\{\sin at\} = s^2\mathcal{L}\{\sin at\} - a$$

$$\text{或} \quad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

## 積分式的拉氏變換

1.17 證明定理 1-11：若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = f(s)/s$ 。

證 令  $G(t) = \int_0^t F(u) du$ ，則  $G'(t) = F(t)$  且  $G(0) = 0$ ，等號兩邊取拉氏變換，得

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

$$\text{故} \quad \mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s} \quad \text{即} \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

1.18 \*  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\}$ 。

證 由定理 1-13 之後的例子可得

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

故由第 17 題，

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\} = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

### 乘上 $t$ 的幂次

#### 1.19 證明定理 1-12：

證 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則  $\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$  其中  $n = 1, 2, 3, \dots$

由定義 
$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

再利用萊普尼茨規則 (Leibnitz's rule)，亦即將微分符號移至積分符號內，可得

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} = f'(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t) dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st} F(t) dt \\ &= - \int_0^\infty e^{-st} \{t F(t)\} dt \\ &= -\mathcal{L}\{t F(t)\} \end{aligned}$$

故 
$$\mathcal{L}\{t F(t)\} = -\frac{df}{ds} = -f'(s) \quad (1)$$

由此證明了  $n = 1$  的情形。

以下採用數學歸納法來證明此題。假設在  $n = k$  時，原式成立，亦即假設

$$\int_0^\infty e^{-st} \{t^k F(t)\} dt = (-1)^k f^{(k)}(s) \quad (2)$$

則

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} \{t^k F(t)\} dt = (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

利用萊普尼茨規則

$$= \int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\} dt = (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

即

$$\int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\} dt = (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(s) \quad (3)$$

故若(2)式成立(即  $n = k$  時成立), 則(3)式, 即  $n = k + 1$  時亦成立。但由(1)得知,  $n = 1$  時成立, 故  $n = 1 + 1 = 2$  及  $n = 2 + 1 = 3, \dots$  等均成立, 故對於所有正整數的  $n$  值均成立。

若須更嚴密的證明, 則須先證明萊普尼茨規則, 這方面可參見第 166 題。

1.20 求 (a)  $\mathcal{L}\{t \sin at\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{t^2 \cos at\}$

圖 (a) 因爲  $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$ , 可由第 19 題解得

$$\mathcal{L}\{t \sin at\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{a}{s^2 + a^2} \right) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

另解:

$$\text{因 } \mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at \, dt = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

對  $a$  微分(利用萊普尼茨規則)可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \int_0^\infty e^{-st} \cos at \, dt &= \int_0^\infty e^{-st} \{-t \sin at\} \, dt = -\mathcal{L}\{t \sin at\} \\ &= \frac{d}{da} \left( \frac{s}{s^2 + a^2} \right) = -\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} \end{aligned}$$

由上可得

$$\mathcal{L}\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

上述結果和下式是一致的  $\frac{d}{da} \mathcal{L}\{\cos at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{da} \cos at\right\}$ 。

(b) 因  $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$ , 再由第 19 題可得

$$\mathcal{L}\{t^2 \cos at\} = \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{s}{s^2 + a^2} \right) = \frac{2s^3 - 6a^2s}{(s^2 + a^2)^3}$$

亦可利用(a)部份的另解, 將之寫成

$$\mathcal{L}\{t^2 \cos at\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{d^2}{da^2}(\cos at)\right\} = -\frac{d^2}{da^2} \mathcal{L}\{\cos at\}$$

結果是相同的。

除以  $t$

1.21 證明定理 1-13: 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ , 則  $\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u) \, du$ 。

證 令  $G(t) = \frac{F(t)}{t}$ , 則  $F(t) = tG(t)$ , 等號雙方各取拉氏變換, 並利用第 19 題, 可得

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{G(t)\} \quad \text{或} \quad f(s) = -\frac{dg}{ds}$$

兩邊積分, 可得

$$g(s) = -\int_s^\infty f(u) du = \int_s^\infty f(u) du \quad (1)$$

即

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u) du$$

注意在(1)式中, 我們須選取積分常數  $s$ , 使得  $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$  (見定理 1-15)。

1.22 (a) 證明  $\int_0^\infty \frac{F(t)}{t} dt = \int_0^\infty f(u) du$  (假設以上積分值均收斂)

(b) 證明  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

證 (a) 由 21 題,

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{F(t)}{t} dt = \int_s^\infty f(u) du$$

令  $s \rightarrow 0+$ , 並假設積分值收斂, 則可得證

(b) 令  $F(t) = \sin t$  則在(a)中  $f(s) = 1/(s^2 + 1)$ , 故

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1} = \tan^{-1} u \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

## 週期函數

1.23 證明定理 1-14: 若  $F(t)$  有週期  $T > 0$ , 則

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

證 證明如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \\ &= \int_0^T e^{-st} F(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} F(t) dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} F(t) dt + \dots \end{aligned}$$

在第二積分式中，令  $t = u + T$ ，在第三積分式中，令  $t = u + 2T$ ，以此類推，可得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^T e^{-su} F(u) du + \int_0^T e^{-s(u+T)} F(u+T) du + \int_0^T e^{-s(u+2T)} F(u+2T) du + \cdots \\
 &= \int_0^T e^{-su} F(u) du + e^{-sT} \int_0^T e^{-su} F(u) du + e^{-2sT} \int_0^T e^{-su} F(u) du + \cdots \\
 &= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots) \int_0^T e^{-su} F(u) du \\
 &= \frac{\int_0^T e^{-su} F(u) du}{1 - e^{-sT}}
 \end{aligned}$$

其中我們用到週期函數之週期性  $F(u+T) = F(u)$ ,  $F(u+2T) = F(u)$ ，及以下之恒等式

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

#### 1.24 (a) 畫出函數圖形

$$F(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

將之擴展成週期為  $2\pi$  的函數：

(b) 計算  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ .

答 (a) 圖形見圖 1-5。

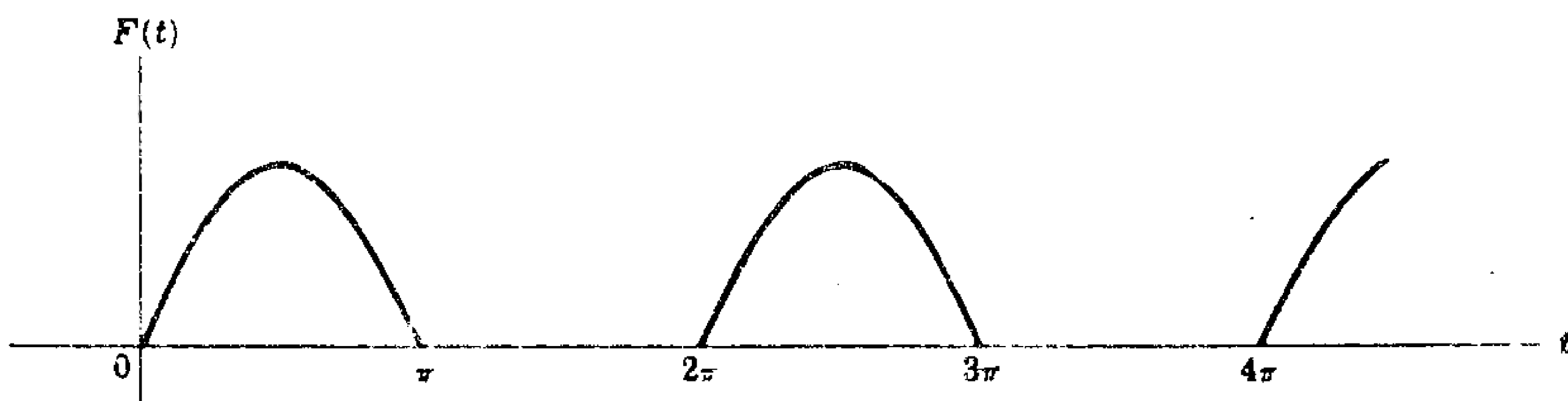


圖 1-5

(b) 由 23 題，將  $T = 2\pi$  代入，得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} F(t) dt \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \left\{ \frac{e^{-st} (-s \sin t - \cos t)}{s^2 + 1} \right\} \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \left\{ \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \right\} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(s^2 + 1)}
 \end{aligned}$$



其中用到第 2 題中的(1)式。

$F(t)$  之圖形稱為半波整流正弦曲線 (Half wave rectified sine curve)

### 初值及終值定理

1.25 證明初值定理： $\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s f(s)$ .

圖 由 13 題

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = s f(s) - F(0) \quad (1)$$

若  $F'(t)$  為分段連續，且為指數級，則

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = 0 \quad (2)$$

在(1)式中，令  $s \rightarrow \infty$ ，且假設  $F(t)$  在  $t=0$  連續，則可得

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s f(s) - F(0) \quad \text{或} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s f(s) = F(0) = \lim_{t \rightarrow 0} F(t)$$

若  $F(t)$  在  $t=0$  不連續，則此定理仍成立，只是我們必須改用定理 1-7。

1.26 證明終值定理： $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s)$ .

圖 由 13 題

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = s f(s) - F(0)$$

當  $s \rightarrow 0$  時，第二個等號的左式可化為

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt &= \int_0^{\infty} F'(t) dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P F'(t) dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \{F(P) - F(0)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) - F(0) \end{aligned}$$

$s \rightarrow 0$  時，等號右式可化為

$$\lim_{s \rightarrow 0} s f(s) - F(0)$$

故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) - F(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s) - F(0)$$

即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s)$$

若  $F(t)$  不連續，則此定理仍成立，只是我們必須改用定理 1-7。

1.27 用  $F(t) = 3e^{-2t}$ ，驗證 25 及 26 題。

圖

$$F(t) = 3e^{-2t}, \quad f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{3}{s+2}.$$

由初值定理 (25 題) ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} 3e^{-2t} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s}{s+2}$$

即  $3=3$  , 由此可知其成立。

由終值定理 (26 題) ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 3e^{-2t} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s}{s+2}$$

即  $0=0$  , 故亦成立。

## 伽瑪函數

1.28 證明 : (a)  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ,  $n > 0$ ; (b)  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \text{證 (a) } \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P u^n e^{-u} du \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ (u^n)(-e^{-u}) \Big|_0^P - \int_0^P (-e^{-u})(nu^{n-1}) du \right\} \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ -P^n e^{-P} + n \int_0^P u^{n-1} e^{-u} du \right\} \\ &= n \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du = n\Gamma(n) \text{ 其中 } n > 0 \end{aligned}$$

$$(b) \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-u} du = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-u} du = \lim_{P \rightarrow \infty} (1 - e^{-P}) = 1.$$

令  $n=1, 2, 3, \dots$  代入  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ , 得

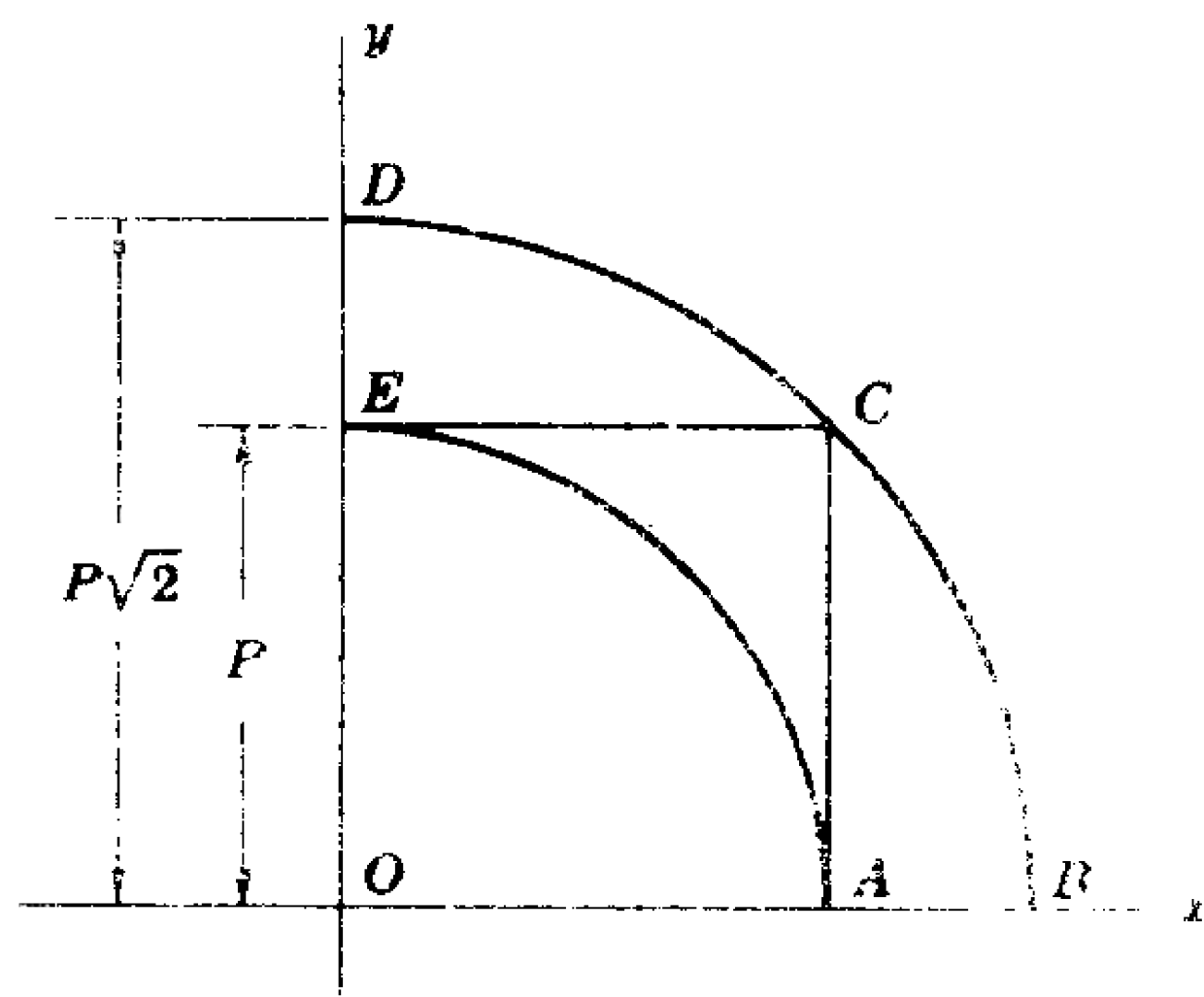
$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!, \quad \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$

一般而言, 若  $n$  為正整數, 則  $\Gamma(n+1) = n!$ 。

1.29 證明 :  $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

證 令  $I_P = \int_0^P e^{-x^2} dx = \int_0^P e^{-y^2} dy$   
且令  $\lim_{P \rightarrow \infty} I_P = I$ , 為所求出之積分  
值, 則

$$\begin{aligned} I_P^2 &= \left( \int_0^P e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^P e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_0^P \int_0^P e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$



■ 1-6

$$= \iint_{R_P} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

其中  $R_P$  為正方形  $OACE$ ，邊長為  $P$ （見圖 1-6）。

因被積函數為正數，故

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I_P^2 \leq \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (1)$$

其中  $R_1$ ， $R_2$  分別是半徑為  $P$  及  $P\sqrt{2}$  的  $1/4$  圓（在第一象限）。

利用極座標（ $r$ ， $\theta$ ）代入(1)式，得

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^P e^{-r^2} r dr d\theta \leq I_P^2 \leq \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{P\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr d\theta \quad (2)$$

$$\text{即} \quad \frac{\pi}{4}(1 - e^{-P^2}) \leq I_P^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2P^2}) \quad (3)$$

在(3)式中，令  $P \rightarrow \infty$ ，可得  $\lim_{P \rightarrow \infty} I_P^2 = I^2 = \pi/4$  及  $I = \sqrt{\pi}/2$ 。

1.30 證明： $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ 。

圖  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du$ ，令  $u = v^2$ ，並利用 29 題，即可化簡得

$$2 \int_0^\infty e^{-v^2} dv = 2 \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \sqrt{\pi}$$

1.31 證明： $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ ，其中  $n > -1$ ， $s > 0$ 。

圖  $\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt$ ，令  $st = u$ ，並假設  $s > 0$ ，則

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n d\left(\frac{u}{s}\right) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

1.32 證明： $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi/s}$ ， $s > 0$ 。

圖 在 31 題中，令  $n = -1/2$ ，則

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

雖然  $F(t) = t^{-1/2}$  不能滿足定理 1-1 的充分條件，但是其拉氏變換仍然存在。此函數滿足 145 題的定理。

1.33 假設  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$  對所有的  $n$  值均成立，計算下列各值。

(a)  $\Gamma(-\frac{1}{2})$ , (b)  $\Gamma(-\frac{3}{2})$ , (c)  $\Gamma(-\frac{5}{2})$ , (d)  $\Gamma(0)$ , (e)  $\Gamma(-1)$ , (f)  $\Gamma(-2)$ .

圖 (a) 令  $n = -\frac{1}{2}$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})$ , 則  $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ .

(b) 令  $n = -\frac{3}{2}$ ,  $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}\Gamma(-\frac{3}{2})$ , 則由(a)可得  $\Gamma(-\frac{3}{2}) = -\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}) = (2)(\frac{2}{3})\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

(c) 令  $n = -\frac{5}{2}$ ,  $\Gamma(-\frac{3}{2}) = -\frac{5}{2}\Gamma(-\frac{5}{2})$ , 則由(b)可得  $\Gamma(-\frac{5}{2}) = -\frac{2}{5}\Gamma(-\frac{3}{2}) = -(2)(\frac{2}{5})(\frac{4}{3})\sqrt{\pi} = -\frac{16}{15}\sqrt{\pi}$

(d) 令  $n = 0$ ,  $\Gamma(1) = 0 \cdot \Gamma(0)$ , 因  $\Gamma(1) = 1$ , 故  $\Gamma(0)$  必為  $\infty$ 。

(e) 令  $n = -1$ ,  $\Gamma(0) = -1\Gamma(-1)$  故  $\Gamma(-1)$  為  $\infty$ 。

(f) 令  $n = -2$ ,  $\Gamma(-1) = -2\Gamma(-2)$  故  $\Gamma(-2)$  為  $\infty$ 。

一般而言，若  $p$  為任意正整數或 0，則  $\Gamma(-p)$  為  $\infty$ ，且（見 170 題）

$$\Gamma(-p - \frac{1}{2}) = (-1)^{p+1} \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right) \cdots \left(\frac{2}{2p+1}\right) \sqrt{\pi}$$

## 貝色函數

1.34 (a) 計算  $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$  其中  $J_0(t)$  為 0 階貝色函數。

(b) 由(a)之結果，計算  $\mathcal{L}\{J_0(at)\}$ 。

圖 (a) 解 1：利用級數，令 (23) 式的  $n = 0$ ，得

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \mathcal{L}\{J_0(t)\} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{2^2} \frac{2!}{s^3} + \frac{1}{2^2 4^2} \frac{4!}{s^5} - \frac{1}{2^2 4^2 6^2} \frac{6!}{s^7} + \cdots \\ &= \frac{1}{s} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s^2} \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left( \frac{1}{s^4} \right) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left( \frac{1}{s^6} \right) + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{s^2} \right)^{-1/2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{aligned}$$

其中用列二項式定理（見 172 題）。

解 2：利用微分方程式， $J_0(t)$  滿足下面之微分方程式。

$$tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) = 0 \quad (1)$$

（見性質 5，其中  $n = 0$ ）取(1)式的拉氏變換，並利用定理 1-6 及 1-9 以及定理 1-12，且  $J_0(0) = 1$ ,  $J_0'(0) = 0$ ,  $y = \mathcal{L}\{J_0(t)\}$  代入，得

$$-\frac{d}{ds}\{s^2 y - s(1) - 0\} + \{sy - 1\} - \frac{dy}{ds} = 0$$

化簡得

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{sy}{s^2 + 1}$$

故 
$$\frac{dy}{y} = -\frac{s ds}{s^2 + 1}$$

積分得 
$$y = \frac{c}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

但  $\lim_{s \rightarrow \infty} s y(s) = \frac{cs}{\sqrt{s^2 + 1}} = c$  且  $\lim_{t \rightarrow 0} J_0(t) = 1$ ，故由初值定理

得  $c = 1$ ，故  $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = 1/\sqrt{s^2 + 1}$ 。

還有另一解法，見 165 題。

(b) 由 11 題，

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{(s/a)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$$

1.35 計算  $\mathcal{L}\{J_1(t)\}$ ，其中  $J_1(t)$  為 1 階貝色函數。

圖 由貝色函數的性質 3，得  $J_0'(t) = -J_1(t)$ ，故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J_1(t)\} &= -\mathcal{L}\{J_0'(t)\} = -[s\mathcal{L}\{J_0(t)\} - 1] \\ &= 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{\sqrt{s^2 + 1} - s}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{aligned}$$

亦可用無限級數及微分方程的方法解之（見 178 題）。

## 正弦、餘弦及指數積分

1.36 證明： $\mathcal{L}\{\text{Si}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\} = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}$ 。

圖 解 1：令  $F(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$ ，則  $F(0) = 0$  且  $F'(t) = \frac{\sin t}{t}$  或  $tF'(t) = \sin t$ 。

取拉氏變換，得

$$\mathcal{L}\{tF'(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} \text{ 或 } -\frac{d}{ds}(sf(s) - F(0)) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

即 
$$\frac{d}{ds}(sf(s)) = \frac{-1}{s^2 + 1}$$

積分之，
$$sf(s) = -\tan^{-1} s + c$$

由初值定理， $\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) = \lim_{t \rightarrow 0} F(t) = F(0) = 0$  故  $c = \pi/2$ ，得

$$sf(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1} \frac{1}{s} \text{ 或 } f(s) = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

解 2：見 18 題。

解 3：利用無限級數，得

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \frac{\sin u}{u} du &= \int_0^t \frac{1}{u} \left( u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots \right) du \\
 &= t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} - \frac{t^7}{7 \cdot 7!} + \cdots \\
 \text{故 } \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \right\} &= \mathcal{L} \left\{ t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} - \frac{t^7}{7 \cdot 7!} + \cdots \right\} \\
 &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{s^4} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{s^6} - \frac{1}{7 \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{s^8} + \cdots \\
 &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3s^4} + \frac{1}{5s^6} - \frac{1}{7s^8} + \cdots \\
 &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{(1/s)}{1} - \frac{(1/s)^3}{3} + \frac{(1/s)^5}{5} - \frac{(1/s)^7}{7} + \cdots \right\} \\
 &= \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

其中用到  $\tan^{-1} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots$ ,  $|x| < 1$ .

解 4：令  $u = tv$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \frac{\sin u}{u} du &= \int_0^1 \frac{\sin tv}{v} dv \\
 \text{則 } \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \int_0^1 \frac{\sin tv}{v} dv \right\} \\
 &= \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^1 \frac{\sin tv}{v} dv \right\} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{v} \left\{ \int_0^\infty e^{-st} \sin tv dt \right\} dv \\
 &= \int_0^1 \frac{\mathcal{L}(\sin tv)}{v} dv = \int_0^1 \frac{dv}{s^2 + v^2} \\
 &= \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{v}{s} \Big|_0^1 = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

其中我們假設積分的先後次序是可以對調的。

1.37 證明： $\mathcal{L}\{\text{Ci}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du\right\} = \frac{\ln(s^2 + 1)}{2s}.$

圈 利用 36 題，解 1 的方法，令  $F(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du$  則  $F'(t) = -\frac{\cos t}{t}$   
且  $tF'(t) = -\cos t$ ，取拉氏變換，得

$$-\frac{d}{ds}\{sf(s) - F(0)\} = \frac{-s}{s^2+1} \quad \text{或} \quad \frac{d}{ds}\{sf(s)\} = \frac{s}{s^2+1}$$

積分得  $sf(s) = \frac{1}{2} \ln(s^2+1) + c$

再由終值定理,  $\lim_{s \rightarrow 0} sf(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$  故  $c = 0$ , 代入得

$$sf(s) = \frac{1}{2} \ln(s^2+1) \quad \text{或} \quad f(s) = \frac{\ln(s^2+1)}{2s}$$

亦可用 36 題解 4 的方法解之 (見 153 題)。

1.38 證明:  $\mathcal{L}\{\text{Ei}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right\} = \frac{\ln(s+1)}{s}$

圈 令  $F(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$ , 則  $tF'(t) = -e^{-t}$ , 取拉氏變換, 得

$$-\frac{d}{ds}\{sf(s) - F(0)\} = \frac{-1}{s+1} \quad \text{或} \quad \frac{d}{ds}\{sf(s)\} = \frac{1}{s+1}$$

積分得,  $sf(s) = \ln(s+1) + c$

再利用終值定理 (如同 37 題), 得  $c = 0$ , 代入得

$$f(s) = \frac{\ln(s+1)}{s}$$

在第 153 題中, 有類似 36 題, 解 4 的方法。

## 誤差函數

1.39 證明:  $\mathcal{L}\{\text{erf} \sqrt{t}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du\right\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$

圈 利用無限級數, 得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \left(1 - u^2 + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \cdots\right) du\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t^{5/2}}{5 \cdot 2!} - \frac{t^{7/2}}{7 \cdot 3!} + \cdots\right)\right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5 \cdot 2! s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7 \cdot 3! s^{9/2}} + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{s^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^{5/2}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{s^{7/2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{s^{9/2}} + \cdots \\ &= \frac{1}{s^{3/2}} \left\{1 - \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{s^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{s^3} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{-1/2} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

其中用到二項式定理（見 172 題）。

175 題(a)中有其他解法。

### 脈衝函數（狄瑞克三角形函數）

1.40 證明  $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$  其中  $u(t-a)$  為單位階梯函數。

圖 由定義  $u(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$ ，故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t-a)\} &= \int_0^a e^{-st}(0) dt + \int_a^\infty e^{-st}(1) dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \int_a^P e^{-st} dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_a^P \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{e^{-as} - e^{-sP}}{s} = \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

另解：

因  $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ ，故由第 9 題得， $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}/s$ 。

1.41 求  $\mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\}$  其中  $F_\epsilon(t)$  乃由第 12 頁，(30) 式所定義。

圖 由定義  $F_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases}$  故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F_\epsilon(t) dt \\ &= \int_0^\epsilon e^{-st} (1/\epsilon) dt + \int_\epsilon^\infty e^{-st} (0) dt \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} \end{aligned}$$

1.42 (a) 在 41 題中，證明  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\} = 1$

(b) (a) 之結果和  $\mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(t)\right\}$  是否相同？解釋之。

圖 (a) 證明如下

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - s\epsilon + s^2\epsilon^2/2! - \cdots)}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{s\epsilon}{2!} + \cdots\right) = 1$$

亦可由羅哈士比托規則 (L'Hospital's rule) 求之。



(b) 由數學的觀點來看， $\lim_{t \rightarrow 0} F_t(t)$  並不存在，故  $\mathcal{L}\left\{\lim_{t \rightarrow 0} F_t(t)\right\}$  亦無定義。然而我們令  $\delta(t) = \lim_{t \rightarrow 0} F_t(t)$ ，以致於  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ ，這却是非常有用的。 $\delta(t)$  稱為狄瑞克三角形函數 (Dirac delta function) 或脈衝函數 (Impulse function)。

1.43 證明  $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$ ，其中  $\delta(t)$  為脈衝函數。

圖 利用第 9 題及  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$  即可解得。

1.44 指出下列何者為零積函數？

$$(a) F(t) = \begin{cases} 1 & t=1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad (b) F(t) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad (c) F(t) = \delta(t).$$

圖 (a) 對於所有的  $t > 0$ ， $\int_0^t F(u) du = 0$ ，故  $F(t)$  為零積函數。

(b) 若  $t < 1$ ，則  $\int_0^t F(u) du = 0$ 。

若  $1 \leq t \leq 2$ ，則  $\int_0^t F(u) du = \int_1^t (1) du = t - 1$ 。

若  $t > 2$ ，則  $\int_0^t F(u) du = \int_1^2 (1) du = 1$ 。

因對於所有的  $t > 0$ ， $\int_0^t F(u) du \neq 0$ ，故  $F(t)$  不是零積函數。

(c) 因對於所有的  $t > 0$ ， $\int_0^t \delta(u) du = 1$ ，故  $\delta(t)$  不是零積函數。

## 積分的計算

1.45 求 (a)  $\int_0^\infty t e^{-2t} \cos t dt$ ，(b)  $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt$ 。

圖 (a) 由 19 題，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \cos t\} &= \int_0^\infty t e^{-st} \cos t dt \\ &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\cos t\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2+1} \right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \end{aligned}$$

令  $s = 2$ ，得  $\int_0^\infty t e^{-2t} \cos t dt = \frac{3}{25}$ 。

(b) 若  $F(t) = e^{-t} - e^{-3t}$ ，則  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$ ，由 21 題可得

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right\} = \int_s^\infty \left\{\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+3}\right\} du$$

$$\text{或} \quad \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right) dt = \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

$$\text{取 } s \rightarrow 0+, \text{ 可得 } \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} dt = \ln 3.$$

$$1.46 \text{ 證明 (a) } \int_0^\infty J_0(t) dt = 1, \quad (b) \int_0^\infty e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} dt = \sqrt{2}/2.$$

$$\text{證 (a) 由 34 題,} \quad \int_0^\infty e^{-st} J_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\text{令 } s \rightarrow 0+, \text{ 得 } \int_0^\infty J_0(t) dt = 1.$$

$$(b) \text{ 由 39 題,} \quad \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{erf} \sqrt{t} dt = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

$$\text{令 } s \rightarrow 1, \text{ 得 } \int_0^\infty e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} dt = \sqrt{2}/2.$$

### 其他各類問題

#### 1.47 證明定理 1-1。

證 對於任意正數  $N$ ，我們有

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = \int_0^N e^{-st} F(t) dt + \int_N^\infty e^{-st} F(t) dt$$

因在  $0 \leq t \leq N$  的區間中， $F(t)$  是分段連續的，故等號右邊的第一個積分式存在。而等號右邊的第二個積分式亦存在。這是因為在  $t > N$  時， $F(t)$  為  $\gamma$  指數級。為了更明白表達，只要參見下式即可明白。

$$\begin{aligned} \left| \int_N^\infty e^{-st} F(t) dt \right| &\leq \int_N^\infty |e^{-st} F(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-st} |F(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-st} M e^{\gamma t} dt = \frac{M}{s-\gamma} \end{aligned}$$

故當  $s > r$  時，拉氏變換式存在。

1.48 求  $\mathcal{L}\{\sin \sqrt{t}\}$ 。

圖解 1：利用級數

$$\sin \sqrt{t} = \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{t})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{t})^7}{7!} + \cdots = t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3!} + \frac{t^{5/2}}{5!} - \frac{t^{7/2}}{7!} + \cdots$$

取拉氏變換，得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin \sqrt{t}\} &= \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3! s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5! s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7! s^{9/2}} + \cdots \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2^2 s} \right) + \frac{(1/2^2 s)^2}{2!} - \frac{(1/2^2 s)^3}{3!} + \cdots \right\} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-1/2^2 s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-1/4s} \end{aligned}$$

解 2：利用微分方程式

令  $Y(t) = \sin \sqrt{t}$ ，將之微分兩次後，可發現

$$4tY'' + 2Y' + Y = 0$$

取拉氏變換，並令  $y = \mathcal{L}\{Y(t)\}$ ，得

$$-4 \frac{d}{ds} \{s^2 y - sY(0) - Y'(0)\} + 2\{s y - Y(0)\} + y = 0$$

或

$$4s^2 y' + (6s - 1)y = 0$$

解得，

$$y = \frac{c}{s^{3/2}} e^{-1/4s}$$

$t$  很小時，可得  $\sin \sqrt{t} \sim \sqrt{t}$  且  $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}$ ， $s$  很大時，得  $y \sim c/s^{3/2}$ ，比較後可知  $c = \sqrt{\pi}/2$ ，故

$$\mathcal{L}\{\sin \sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-1/4s}$$

1.49 求  $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$ 。

圖 令  $F(t) = \sin \sqrt{t}$ ，則  $F'(t) = \frac{\cos \sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$ ， $F(0) = 0$ ，故由 48 題，

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\left\{\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = s f(s) - F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{1/2}} e^{-1/4s}$$

故得 
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} e^{-1/4s}$$

亦可用級數法解之（見175題(b））。

### 1.50 證明

$$\mathcal{L}\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}$$

其中  $\gamma = .5772156 \dots$  稱為奧衣勒常數（Euler's constant）。

證 由定義得

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} u^{r-1} e^{-u} du$$

對  $r$  微分，得

$$\Gamma'(r) = \int_0^{\infty} u^{r-1} e^{-u} \ln u du$$

由上式得

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-u} \ln u du$$

令  $u = st$ ， $s > 0$ ，將上式再化簡，得

$$\Gamma'(1) = -s \int_0^{\infty} e^{-st} (\ln s + \ln t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \mathcal{L}\{\ln t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \ln t dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \ln s \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s} \end{aligned}$$

另解：當  $k > -1$  時，下式成立

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^k dt = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$$

對  $k$  微分，

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^k \ln t dt = \frac{\Gamma'(k+1) - \Gamma(k+1) \ln s}{s^{k+1}}$$

令  $k = 0$ ，就可得所需之結果，

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \ln t dt = \mathcal{L}\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}$$

## 補充題

## 基本函數的拉氏變換

1.51 求下列各函數的拉氏變換，並指明當其拉氏變換存在時， $s$  的範圍所在。

(a) $2e^{4t}$	答 (a) $2/(s-4),$	$s > 4$
(b) $3e^{-2t}$	(b) $3/(s+2),$	$s > -2$
(c) $5t - 3$	(c) $(5-3s)/s^2,$	$s > 0$
(d) $2t^2 - e^{-t}$	(d) $(4+4s-s^2)/s^3(s+1),$	$s > 0$
(e) $3 \cos 5t$	(e) $3s/(s^2+25),$	$s > 0$
(f) $10 \sin 6t$	(f) $60/(s^2+36),$	$s > 0$
(g) $6 \sin 2t - 5 \cos 2t$	(g) $(12-5s)/(s^2+4),$	$s > 0$
(h) $(t^2+1)^2$	(h) $(s^4+4s^2+24)/s^5,$	$s > 0$
(i) $(\sin t - \cos t)^2$	(i) $(s^2-2s+4)/s(s^2+4),$	$s > 0$
(j) $3 \cosh 5t - 4 \sinh 5t$	(j) $(3s-20)/(s^2-25),$	$s > 5$

1.52 求 (a)  $\mathcal{L}\{(5e^{2t}-3)^2\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{4 \cos^2 2t\}$ .

答 (a)  $\frac{25}{s-4} - \frac{30}{s-2} + \frac{9}{s}, s > 4$  (b)  $\frac{2}{s} + \frac{2s}{s^2+16}, s > 0$

1.53 求  $\mathcal{L}\{\cosh^2 4t\}$ . 答  $\frac{s^2-32}{s(s^2-64)}$

1.54 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  其中 (a)  $F(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ 4 & t > 2 \end{cases}$ , (b)  $F(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 5 \\ 1 & t > 5 \end{cases}$

答 (a)  $4e^{-2s}/s$  (b)  $\frac{2}{s^2}(1-e^{-5s}) - \frac{10}{s}e^{-5s}$

1.55 證明  $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$

1.56 探討下列函數的拉氏變換是否存在。

(a)  $1/(t+1)$ , (b)  $e^{t^2-t}$ , (c)  $\cos t^2$  答 (a) 存在, (b) 不存在, (c) 存在

## 線性、平移及標度改變性質

1.57 求  $\mathcal{L}\{3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2 \sin 5t + 3 \cos 2t\}$ .

答  $\frac{72}{s^5} - \frac{12}{s^4} + \frac{4}{s+3} - \frac{10}{s^2+25} + \frac{3s}{s^2+4}$

1.58 計算下列各式

- |  |                           |
|--|---------------------------|
| (a) $\mathcal{L}\{t^3 e^{-3t}\}$                     | 答 (a) $6/(s+3)^4$         |
| (b) $\mathcal{L}\{e^{-t} \cos 2t\}$                  | (b) $(s+1)/(s^2+2s+5)$    |
| (c) $\mathcal{L}\{2e^{3t} \sin 4t\}$                 | (c) $8/(s^2-6s+25)$       |
| (d) $\mathcal{L}\{(t+2)^2 e^t\}$                     | (d) $(4s^2-4s+2)/(s-1)^3$ |
| (e) $\mathcal{L}\{e^{2t}(3 \sin 4t - 4 \cos 4t)\}$   | (e) $(20-4s)/(s^2-4s+20)$ |
| (f) $\mathcal{L}\{e^{-4t} \cosh 2t\}$                | (f) $(s+4)/(s^2+8s+12)$   |
| (g) $\mathcal{L}\{e^{-t}(3 \sinh 2t - 5 \cosh 2t)\}$ | (g) $(1-5s)/(s^2+2s-3)$   |

 1.59 求 (a)  $\mathcal{L}\{e^{-t} \sin^2 t\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{(1+te^{-t})^3\}$ .

答 (a)  $\frac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$  (b)  $\frac{1}{s} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+2)^3} + \frac{6}{(s+3)^4}$

 1.60 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  其中  $F(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & t > 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$ . 答  $2e^{-s}/s^3$ 

 1.61 若  $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$  的拉氏變換式分別是  $f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s)$  且  $c_1, c_2, \dots, c_n$  為任意常數, 證明

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) + \dots + c_n F_n(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) + \dots + c_n f_n(s)$$

 1.62 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{s^2-s+1}{(2s+1)^2(s-1)}$ , 求  $\mathcal{L}\{F(2t)\}$ . 答  $(s^2-2s+4)/4(s+1)^2(s-2)$ 

 1.63 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{e^{-1/s}}{s}$ , 求  $\mathcal{L}\{e^{-t} F(3t)\}$ . 答  $\frac{e^{-3/(s+1)}}{s+1}$ 

 1.64 若  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ , 證明當  $r > 0$  時,

$$\mathcal{L}\{r^t F(at)\} = \frac{1}{s - \ln r} f\left(\frac{s - \ln r}{a}\right)$$

### 導式的拉氏變換

 1.65 (a) 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ , 證明

$$\mathcal{L}\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - s F'(0) - F''(0)$$

 說明  $F(t)$  須滿足那些條件

#### 40 第一章 拉卜拉士變換

(b) 推廣(a)的結果，並以數學歸納法證明之。

1.66 給定  $F(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$ . (a) 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ . (b) 求  $\mathcal{L}\{F'(t)\}$ . (c) 下列等式

$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0)$  能成立嗎？解釋之。

$$(a) \frac{2}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}, \quad (b) \frac{2}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

1.67 (a) 求  $F(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$ , 求  $\mathcal{L}\{F''(t)\}$ .

(b) 下列等式  $\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{F(t)\} - sF(0) - F'(0)$  能成立嗎？解釋之。

答 (a)  $2(1 - e^{-s})/s$

1.68 證明：(a) 定理 1-7；(b) 定理 1-8。

#### 積分式之拉氏變換

1.69 直接證明  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t (u^2 - u + e^{-u}) du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{t^2 - t + e^{-t}\}$ .

1.70 若  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ , 證明  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} F(u) du\right\} = \frac{f(s)}{s^2}$ .

[上面之雙重積分式可簡潔地寫成  $\int_0^t \int_0^t F(t) dt^2$ .]

1.71 推廣 70 題的結論。

1.72 證明  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} du\right\} = \frac{1}{s} \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$ .

1.73 證明  $\int_{t=0}^{\infty} \int_{u=0}^t \frac{e^{-t} \sin u}{u} du dt = \frac{\pi}{4}$ .

#### 乘以 $t$ 的冪次

1.74 證明 (a)  $\mathcal{L}\{t \cos at\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

$$(b) \mathcal{L}\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

1.75 求  $\mathcal{L}\{t(3 \sin 2t - 2 \cos 2t)\}$ .

答  $\frac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2 + 4)^2}$

1.76 證明  $\mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3}$ .

1.77 計算 (a)  $\mathcal{L}\{t \cosh 3t\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{t \sinh 2t\}$ . 答 (a)  $(s^2 + 9)/(s^2 - 9)^2$ , (b)  $4s/(s^2 - 4)^2$

1.78 求 (a)  $\mathcal{L}\{t^2 \cos t\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{(t^2 - 3t + 2) \sin 3t\}$ .

答 (a)  $(2s^3 - 6s)/(s^2 + 1)^3$ , (b)  $\frac{6s^4 - 18s^3 + 126s^2 - 162s + 432}{(s^2 + 9)^3}$

1.79 求  $\mathcal{L}\{t^3 \cos t\}$ . 答  $\frac{6s^4 - 36s^2 + 6}{(s^2 + 1)^4}$

1.80 證明  $\int_0^\infty t e^{-3t} \sin t \, dt = \frac{3}{50}$ .

除以  $t$

1.81 證明  $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$ .

1.82 證明  $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}\right)$ .

1.83 求  $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}$ . Ans.  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)$

1.84 證明  $\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} \, dt = \ln 2$ . [提示：利用 81 題]

1.35 計算  $\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} \, dt$ . Ans.  $\ln(3/2)$

1.86 證明  $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} \, dt = \frac{\pi}{2}$ .

週期函數

1.87 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  其中  $F(t)$  為圖 1-7 所示之週期函數。

答  $\frac{1}{s} \tanh \frac{s}{2}$

$\{F(t)\}$



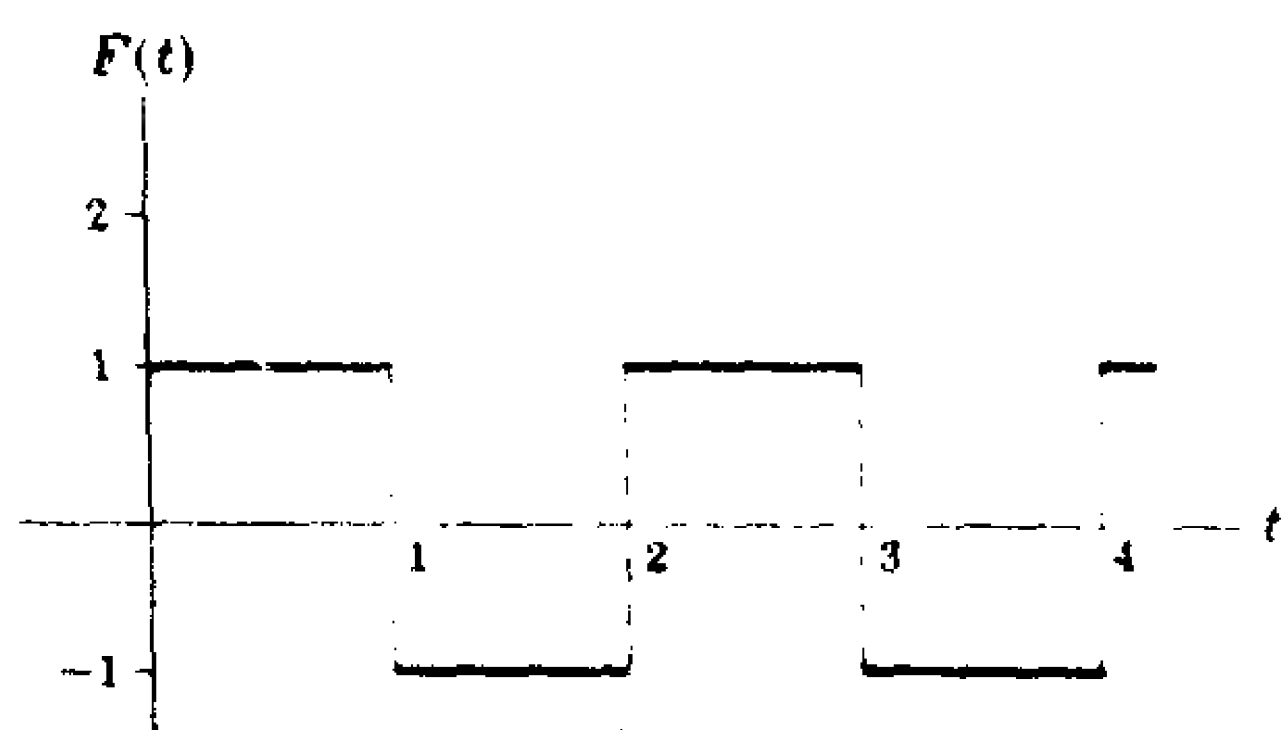


圖 1-7

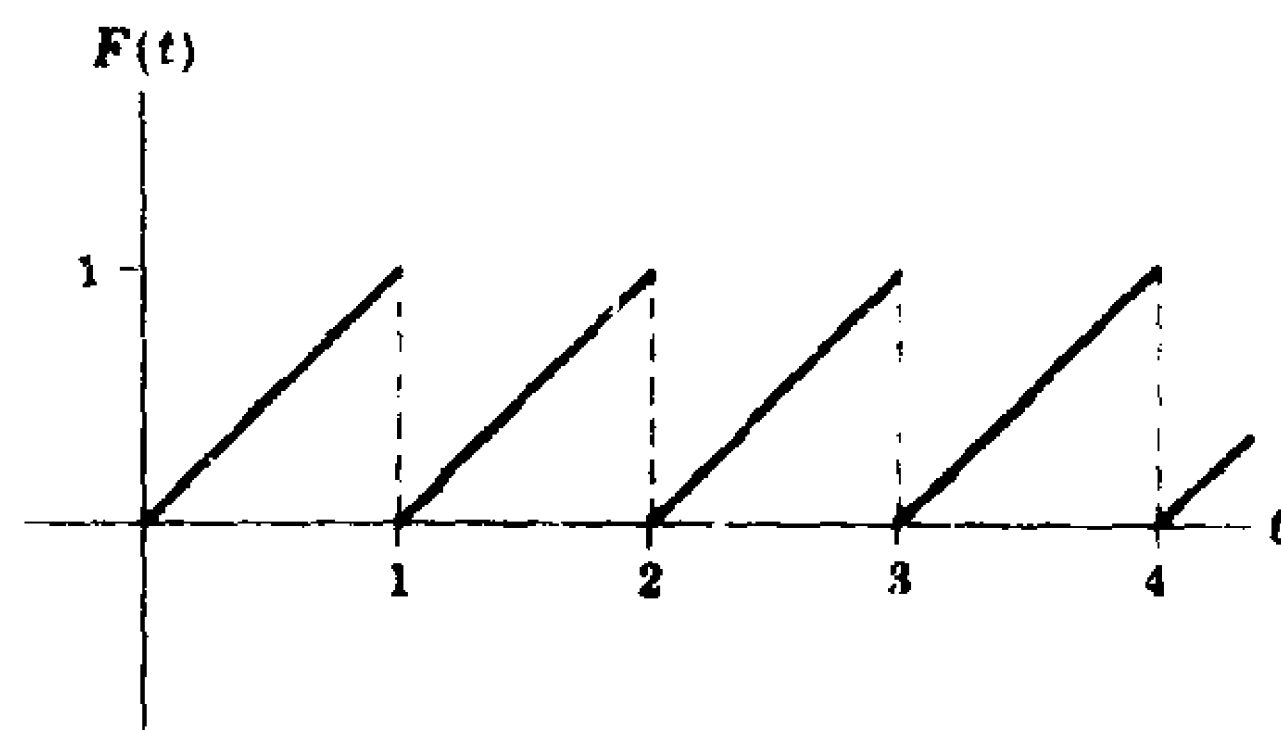


圖 1-8

1.88 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  其中  $F(t)$  為圖 1-8 所示之週期函數。

圖  $\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$

1.89 令  $F(t) = \begin{cases} 3t & 0 < t < 2 \\ 6 & 2 < t < 4 \end{cases}$  其中  $F(t)$  之週期為 4, (a) 畫出  $F(t)$ , (b) 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ 。

圖 (b)  $\frac{3 - 3e^{-2s} - 6se^{-2s}}{s^2(1-e^{-4s})}$

1.90 若  $F(t) = t^2$ ,  $0 < t < 2$  且  $F(t+2) = F(t)$ , 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ 。

圖  $\frac{2 - 2e^{-2s} - 4se^{-2s} - 4s^2e^{-2s}}{s^3(1-e^{-2s})}$

1.91 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  其中  $F(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$ , 且對於所有  $t > 0$ , 滿足  $F(t+2) = F(t)$ 。

圖  $\frac{1 - e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-2s})}$

1.92 (a) 證明圖 1-9 所示之三角波曲線, 其拉氏變換為  $\frac{1}{s^2} \tanh \frac{s}{2}$ 。

(b) (a) 之結果是否可由 87 題求得? 解釋之。

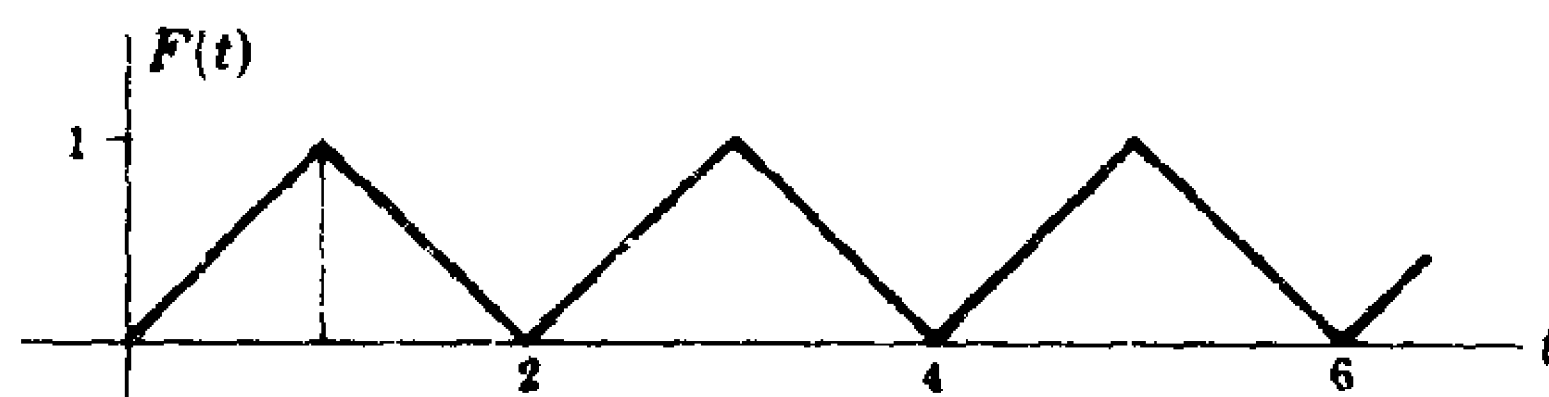


圖 1-9

### 初值及終值定理

- 1.93 對以下之函數驗證初值定理 (a)  $3 - 2 \cos t$ , (b)  $(2t + 3)^2$ , (c)  $t + \sin 3t$ .
- 1.94 對以下之函數驗證終值定理 (a)  $1 + e^{-t}(\sin t + \cos t)$ , (b)  $t^3 e^{-2t}$ .
- 1.95 討論終值定理是否可用於函數  $\cos t$ .
- 1.96 若當  $t \rightarrow 0$  時,  $F(t) \sim ct^p$ , 其中  $p > -1$ , 證明當  $s \rightarrow \infty$  時,  $f(s) \sim c \Gamma(p+1)/s^{p+1}$ .
- 1.97 若當  $t \rightarrow \infty$  時,  $F(t) \sim ct^p$ , 其中  $p > -1$ , 證明當  $s \rightarrow \infty$  時,  $f(s) \sim c \Gamma(p+1)/s^{p+1}$ .

### 伽瑪函數

- 1.98 計算 (a)  $\Gamma(5)$ , (b)  $\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}$ , (c)  $\Gamma(5/2)$ , (d)  $\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(4)}{\Gamma(11/2)}$ .
- 圖 (a) 24, (b)  $1/60$ , (c)  $3\sqrt{\pi}/4$ , (d)  $32/315$ .
- 1.99 求 (a)  $\mathcal{L}\{t^{1/2} + t^{-1/2}\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$ , (c)  $\mathcal{L}\{(1 + \sqrt{t})^4\}$ .
- 圖 (a)  $(2s + 1)\sqrt{\pi}/2s^{3/2}$ , (b)  $\Gamma(2/3)/s^{2/3}$ , (c)  $(s^2 + 2\sqrt{\pi}s^{3/2} + 6s + 3\sqrt{\pi}s^{1/2} + 2)/s^3$ .
- 1.100 求 (a)  $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{t^{7/2}e^{3t}\}$ .
- 圖 (a)  $\sqrt{\pi}/(s+2)$ , (b)  $105\sqrt{\pi}/16(s-3)^{9/2}$ .

### 貝色函數

- 1.101 證明  $\mathcal{L}\{e^{-at}J_0(bt)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 - 2as + a^2 + b^2}}$ .
- 1.102 證明  $\mathcal{L}\{tJ_0(at)\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$ .
- 1.103 求 (a)  $\mathcal{L}\{e^{-3t}J_0(4t)\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{tJ_0(2t)\}$ . 圖 (a)  $\frac{1}{\sqrt{s^2 + 6s + 25}}$ , (b)  $\frac{s}{(s^2 + 4)^{3/2}}$ .
- 1.104 證明 (a)  $J_0'(t) = -J_1(t)$ , (b)  $\frac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$ .
- 1.105 若  $I_0(it) = J_0(it)$ , 證明  $\mathcal{L}\{I_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}}$ ,  $a > 0$ .
- 1.106 求  $\mathcal{L}\{tJ_0(t)e^{-t}\}$ . 圖  $(s-1)/(s^2 - 2s + 2)^{3/2}$ .
- 1.107 證明 (a)  $\int_0^\infty J_0(t) dt = 1$ , (b)  $\int_0^\infty e^{-t}J_0(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

#### 44 第一章 拉卜拉士變換

1.108 求  $\frac{d^2}{dt^2}\{e^{2t} J_0(2t)\}$  的拉氏變換。 答  $\frac{s^2}{\sqrt{s^2-4s+8}} - s - 2$

1.109 證明  $\mathcal{L}\{t J_1(t)\} = \frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}$ .

1.110 證明  $\mathcal{L}\{J_0(a\sqrt{t})\} = \frac{e^{-a^2/4s}}{s}$ .

1.111 計算  $\int_0^\infty t e^{-3t} J_0(4t) dt$ . 答  $3/125$

1.112 證明  $\mathcal{L}\{J_n(t)\} = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$  由此可得  $\mathcal{L}\{J_n(at)\}$ .

#### 正弦、餘弦及指數積分

1.113 計算 (a)  $\mathcal{L}\{e^{2t} \text{Si}(t)\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{t \text{Si}(t)\}$ .

答 (a)  $\tan^{-1}(s-2)/(s-2)$ , (b)  $\frac{\tan^{-1}s}{s^2} - \frac{1}{s(s^2+1)}$

1.114 證明  $\mathcal{L}\{t^2 \text{Ci}(t)\} = \frac{\ln(s^2+1)}{s^3} - \frac{3s^2+1}{s(s^2+1)^2}$ .

1.115 求 (a)  $\mathcal{L}\{e^{-3t} \text{Ei}(t)\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{t \text{Ei}(t)\}$ .

答 (a)  $\frac{\ln(s+4)}{s+3}$ , (b)  $\frac{\ln(s+1)}{s^2} - \frac{1}{s(s+1)}$

1.116 求 (a)  $\mathcal{L}\{e^{-t} \text{Si}(2t)\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{te^{-2t} \text{Ei}(3t)\}$ .

答 (a)  $\frac{\tan^{-1}(s+1)/2}{s+1}$ , (b)  $\frac{1}{(s+2)^2} \ln\left(\frac{s+5}{3}\right) - \frac{1}{(s+2)(s+5)}$

#### 誤差函數

1.117 計算 (a)  $\mathcal{L}\{e^{3t} \text{erf}\sqrt{t}\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{t \text{erf}(2\sqrt{t})\}$ .

答 (a)  $\frac{1}{(s-3)\sqrt{s-2}}$ , (b)  $\frac{3s+8}{s^2(s+4)^{3/2}}$

1.118 證明  $\mathcal{L}\{\text{erfc}\sqrt{t}\} = \frac{1}{\sqrt{s+1}(\sqrt{s+1}+1)}$ .

1.119 求  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \operatorname{erf} \sqrt{u} du\right\}$  答  $1/s^2\sqrt{s+1}$

單位階梯函數和脈衝函數 (狄瑞克三角形函數)

1.120 (a) 利用單位階梯函數, 證明  $F(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$  可寫成  $e^{-t}(1 - u(t-3))$ .

(b) 利用  $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}/s$  求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ .

答 (b)  $\frac{1 - e^{-3(s+1)}}{s+1}$

1.121 證明  $F(t) = \begin{cases} F_1(t) & 0 < t < a \\ F_2(t) & t > a \end{cases}$  可改寫成

$$F(t) = F_1(t) + \{F_2(t) - F_1(t)\}u(t-a)$$

1.122 若在  $0 < t < a_1$  時,  $F(t) = F_1(t)$ , 在  $a_1 < t < a_2$  時,  $F(t) = F_2(t) \cdots$  在  $a_{n-2} < t < a_{n-1}$  時,  $F(t) = F_{n-1}(t)$ , 且在  $t > a_{n-1}$  時,  $F(t) = F_n(t)$  證明

$$F(t) = F_1(t) + \{F_2(t) - F_1(t)\}u(t-a_1) + \cdots + \{F_n(t) - F_{n-1}(t)\}u(t-a_{n-1})$$

1.123 將下列函數以單位階梯函數表之。

(a)  $F(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < 2 \\ 4t & t > 2 \end{cases}$  (b)  $F(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ \sin 2t & \pi < t < 2\pi \\ \sin 3t & t > 2\pi \end{cases}$

答 (a)  $t^2 + (4t - t^2)u(t-2)$ , (b)  $\sin t + (\sin 2t - \sin t)u(t-\pi) + (\sin 3t - \sin 2t)u(t-2\pi)$

1.124 證明  $\mathcal{L}\{t^2 u(t-2)\} = \frac{2}{s^3} - \frac{2e^{-2s}}{s^3}(1 + 2s + 2s^2)$ ,  $s > 0$ .

1.125 計算 (a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2t \delta(t - \pi/3) dt$ , (b)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} u(t-2) dt$ . 答 (a)  $-1/2$ , (b)  $e^{-2}$

1.126 (a) 若  $\delta'(t-a)$  是三角形函數的導式, 證明

$$\int_0^{\infty} F(t) \delta'(t-a) dt = -F'(a)$$

(b) 計算  $\int_0^{\infty} e^{-t} \delta'(t-2) dt$ .

答 (b)  $4e^{-2}$

1.127 在  $0 \leq t < \epsilon$  時,  $G_{\epsilon}(t) = 1/\epsilon$ ;  $\epsilon \leq t < 2\epsilon$  時,  $G_{\epsilon}(t) = 0$ ;  $2\epsilon \leq t < 3\epsilon$  時,

46 第一章 拉卜拉士變換

$$G_{\epsilon}(t) = -1/\epsilon; t \geq 3\epsilon \text{ 時, } G_{\epsilon}(t) = 0$$

(a) 求  $\mathcal{L}\{G_{\epsilon}(t)\}$ , (b) 求  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{G_{\epsilon}(t)\}$ , (c)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{G_{\epsilon}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{\epsilon}(t)\right\}$  是否成立?

(d) 從幾何觀點來討論(a)及(b)之結果。

1.128 定義  $G_{\epsilon}(t)$  為  $\epsilon$  和  $n$  的函數, 且  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{\epsilon}(t) = s^n$  (其中  $n=2, 3, 4, \dots$ ), 由此推廣問題 127 之結論。

積分式之計算

1.129 計算  $\int_0^{\infty} t^3 e^{-t} \sin t \, dt$ . 答 0。

1.130 證明  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{4}$ .

1.131 證明 (a)  $\int_0^{\infty} J_n(t) \, dt = 1$ , (b)  $\int_0^{\infty} t J_n(t) \, dt = 1$ .

1.132 證明  $\int_0^{\infty} u e^{-u^2} J_0(au) \, du = \frac{1}{2} e^{-a^2/4}$ .

1.133 證明  $\int_0^{\infty} t e^{-t} \text{Ei}(t) \, dt = \ln 2 - \frac{1}{2}$ .

1.134 證明  $\int_0^{\infty} u e^{-u^2} \text{erf } u \, du = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

其他各類問題

1.135 若  $F(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$ , 證明  $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

1.136 若  $F(t) = \begin{cases} \cos t & 0 < t < \pi \\ \sin t & t > \pi \end{cases}$ , 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ . 答  $\frac{s + (s-1)e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

1.137 證明  $\mathcal{L}\{\sin^3 t\} = \frac{6}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$ .

1.138 驗證第 B-2 頁表格中的下列各條公式 (a) 16, (b) 17, (c) 20, (d) 28

1.139 求 (a)  $\mathcal{L}\{\sinh^3 2t\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{t^3 \cos 4t\}$ .

答 (a)  $\frac{48}{(s^2-36)(s^2-4)}$ , (b)  $\frac{6s^4 - 576s^2 + 1536}{(s^2+16)^4}$

1.140 在  $t > \pi/4$  時,  $F(t) = 5 \sin 3(t - \pi/4)$ ,  $t < \pi/4$  時,  $F(t) = 0$ , 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ .

答  $e^{-\pi s/4}/(s^2+9)$

1.141 令  $\mathcal{L}\{tF(t)\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$ , 求  $\mathcal{L}\{e^{-t}F(2t)\}$ .

1.142 求 (a)  $\mathcal{L}\{\sinh 2t \cos 2t\}$ , (b)  $\mathcal{L}\{\cosh 2t \cos 2t\}$ .

答 (a)  $2(s^2-8)/(s^4+64)$ , (b)  $s^3/(s^4+64)$

1.143 令  $F(t) = \begin{cases} t+n & 2n \leq t < 2n+1 \\ n-t & 2n+1 \leq t < 2n+2 \end{cases}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . 證明

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \{(3ns+1)e^{-2ns} - 2[(2n+1)s+1]e^{-(2n+1)s} + [(n+2)s+1]e^{-(2n+2)s}\}$$

1.144 (a) 證明  $\mathcal{L}\{\sin^5 t\} = \frac{120}{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+16)}$ .

(b) 利用(a)及137題, 是否可以對於  $\mathcal{L}\{\sin^{2n-1} t\}$  (其中  $n$  為任意正整數) 獲得對應之結果? 驗證你的猜測。

1.145 若當  $t \rightarrow 0$  時,  $F(t)$  為無界 (Unbounded)。證明若滿足下列條件, 則  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  存在。

- (a) 在任意區間  $N_1 \leq t \leq N$  ( $N_1 > 0$ ) 中,  $F(t)$  為分段連續。
- (b) 對於  $0 < n < 1$  的特定常數  $n$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} t^n F(t) = 0$ 。
- (c) 對於  $t > N$ ,  $F(t)$  為  $\gamma$  指數級。

1.146 證明 (a)  $\mathcal{L}\{J_0(t) \sin t\} = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{s^2+4}} \sin\{\frac{1}{2} \tan^{-1}(2/s)\}$

(b)  $\mathcal{L}\{J_0(t) \cos t\} = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{s^2+4}} \cos\{\frac{1}{2} \tan^{-1}(2/s)\}$

1.147 令  $F(t) = \begin{cases} tG(t) & t > 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$ . 證明  $\mathcal{L}\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}[e^{-s} \mathcal{L}\{G(t+1)\}]$ .

1.148 若  $\mathcal{L}\{F''(t)\} = \tan^{-1}(1/s)$ , 且  $F(0) = 2$ ,  $F'(0) = -1$ , 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$ .

答  $\frac{2s-1+\tan^{-1}1/s}{s^2}$

1.149 證明  $\mathcal{L}\{e^{\alpha t} F(\beta t)\} = \frac{1}{\beta} f\left(\frac{s-\alpha}{\beta}\right)$  其中  $\alpha, \beta$  為常數；且  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ .

1.150 證明  $e^{e^t}$  的拉氏變換不存在，但  $e^{-e^t}$  的拉氏變換存在。

1.151 (a) 證明  $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$ .

(b) 計算  $\int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin^2 t}{t} dt$ .

答 (b)  $\frac{1}{4} \ln 5$

1.152 (a) 求  $\mathcal{L}\left\{\frac{1-J_0(t)}{t}\right\}$ ，(b) 證明  $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\{1-J_0(t)\}}{t} dt = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ .

1.153 利用 36 題解 4 的方法，求 37 及 38 題。

1.154 若在  $s=a$  ( $a$  為實數) 時， $\mathcal{L}\{F(t)\}$  存在，證明對於所有  $s>a$ ， $\mathcal{L}\{F(t)\}$  均存在。

1.155 求如圖 1-10 所示週期函數的拉氏變換。

答  $\frac{1-e^{-as}-ase^{-as}}{s^2(1-e^{-as})} \tan \theta_0$

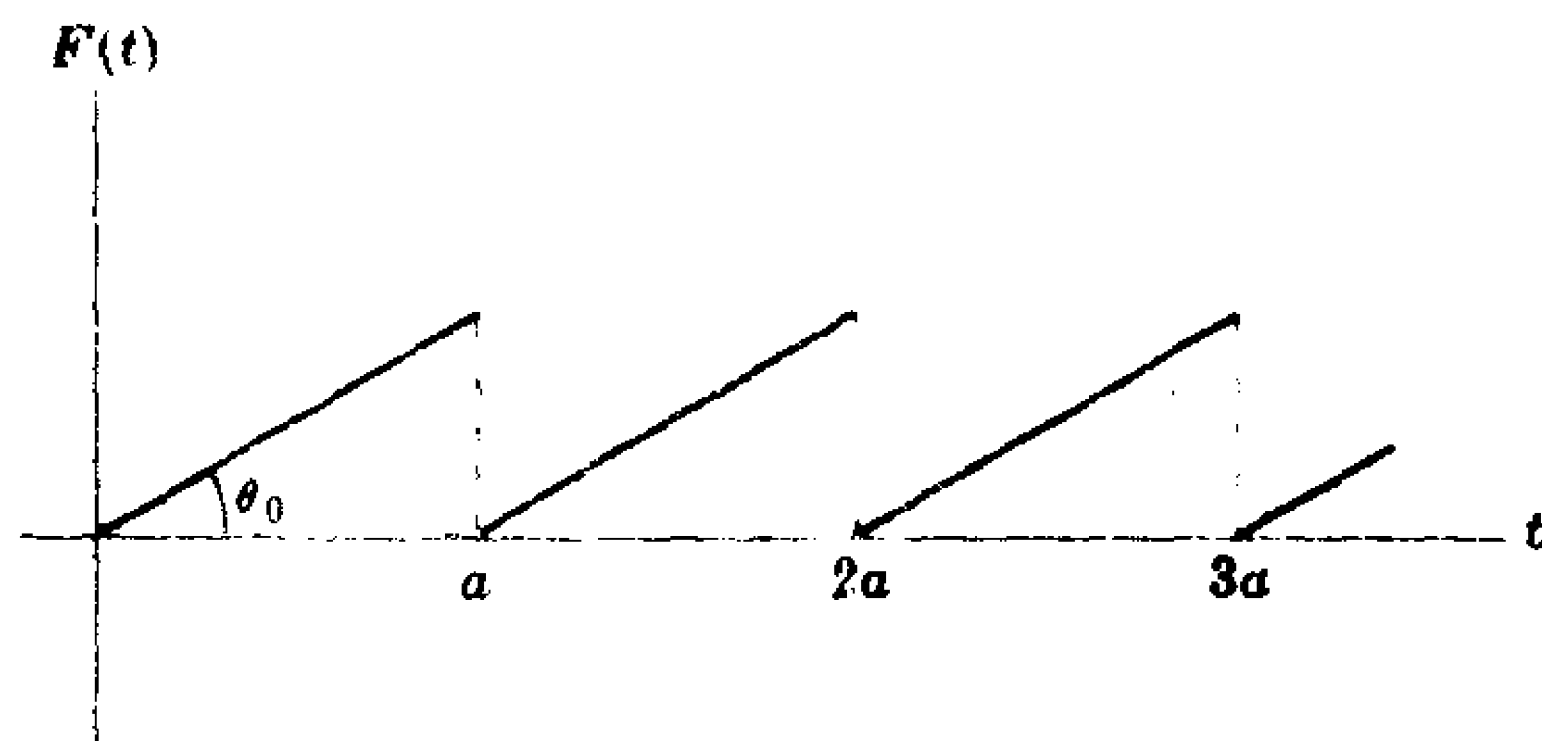


圖 1-10

1.156 證明  $\mathcal{L}\{\sin t^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (4n-2)!}{(2n-1)! s^{2n+1}}$

1.157 證明  $\mathcal{L}\{\sin^6 t\} = \frac{6!}{s(s^2+4)(s^2+16)(s^2+64)}$  並推廣之 (參見 144 題)

1.158 求  $\mathcal{L}\{te^{-2t} J_0(t\sqrt{2})\}$ . 答  $\frac{s+2}{(s^2+4s+6)^{3/2}}$

1.159 求  $\mathcal{L}\{tu(t-1) + t^2 \delta(t-1)\}$ . 答  $e^{-s}(s^2+s+1)/s^2$

1.160 求  $\mathcal{L}\{\cos t \ln t \delta(t-\pi)\}$ . 答  $-e^{-\pi s} \ln \pi$

1.161 若  $F(t)$  和  $G(t)$  在每個有限區間均為分段連續，且在  $t \rightarrow \infty$  時，均是指數級函數，證明  $\mathcal{L}\{F(t)G(t)\}$  存在。

1.162 拉各耳多項式 (Laguerre polynomials)  $L_n(t)$  定義如下

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \{t^n e^{-t}\} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(a) 求  $L_0(t), L_1(t), \dots, L_4(t)$ ，(b) 求  $\mathcal{L}\{L_n(t)\}$ 。

1.163 (a) 令  $a, b, \alpha, \beta$  及  $\Lambda$  均是常數，證明

$$\mathcal{L}\{at^{-\alpha} + bt^{-\beta}\} = \Lambda\{as^{-\alpha} + bs^{-\beta}\}$$

若且唯若  $\alpha + \beta = 1$  且  $\Lambda = \pm \sqrt{\pi} \csc \alpha\pi$ 。

(b) 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = F(s)$ ，則函數  $F(t)$  為其本身的拉氏變換。 $F(t) = at^{-\alpha} + bt^{-\beta}$  可能是其本身的拉氏變換嗎？解釋之。

1.164 若  $F(t)$  及  $G(t)$  的拉氏變換均存在，則  $F(t)G(t)$  的拉氏變換是否也存在呢？驗證你的結論。

1.165 利用  $J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta) d\theta$  證明  $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$ 。

1.166 證明萊普尼茨規則可用於 19 題，並說明須加諸於  $F(t)$  的限制。

1.167 (a) 證明  $\int_0^\infty e^{-st} \left( \frac{1 - \cos t}{t^2} \right) dt = \frac{\pi}{2} - s \ln \left( \frac{s^2}{s^2 + 1} \right) + 2 \tan^{-1} s$ 。

(b) 證明  $\int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ 。

1.168 若  $t$  為無理數，則  $F(t) = 0$ ，若  $t$  為有理數，則  $F(t) = 1$ ，(a) 證明  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  存在，且等於 0。(b)  $F(t)$  是否為零積函數？解釋之。

1.169 證明  $\int_0^\infty t^2 J_0(t) dt = -1$ 。

1.170 若  $p$  為任意正數，證明下式成立，

$$\Gamma(-p - \frac{1}{2}) = (-1)^{p+1} \left( \frac{2}{1} \right) \left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{2}{5} \right) \cdots \left( \frac{2}{2p+1} \right) \sqrt{\pi}$$

1.171 驗證在附錄 B 的表格中，下列各條公式是否成立 (a) 55, (b) 61, (c) 64, (d) 65, (e) 81。

1.172 利用二項式定理，證明在  $|x| < 1$  時，下式成立



$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

由此亦可驗證 34 及 39 題中，無限級數的求和運算。

1.173 利用無限級數，求得下列各式的拉氏變換 (a)  $\sin t$ , (b)  $\cos t$ , (c)  $e^{at}$ , (d)  $\cos \sqrt{t}$ .

1.174 證明  $\mathcal{L}\{\operatorname{erf}(t)\} = \frac{e^{s^2/4}}{s} \operatorname{erfc}(s/2)$  由此求得  $\mathcal{L}\{\operatorname{erf}(at)\}$ .

1.175 (a) 利用微分方程的方法來求  $\mathcal{L}\{\operatorname{erf} \sqrt{t}\}$ 。

(b) 利用無限級數法來求  $\mathcal{L}\{\cos \sqrt{t} / \sqrt{t}\}$ 。

1.176 證明 (a)  $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{tu}) \cos u \, du = \sin t$ ,

$$(b) \int_0^\infty J_0(2\sqrt{tu}) \sin u \, du = \cos t.$$

1.177 證明  $\int_0^x J_0(2\sqrt{tu}) J_0(u) \, du = J_0(t)$ .

1.178 利用 (a) 無限級數，(b) 微分方程式來求  $\mathcal{L}\{J_1(t)\}$ 。參見 35 題。

1.179 若  $s > 0$  且  $n > 1$ ，證明

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\right\} = \Gamma(n) \left\{\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \frac{1}{(s+2)^n} + \dots\right\}$$

1.180 證明若  $n > 1$ ，

$$\zeta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t - 1} dt = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$$

函數  $\zeta(n)$  稱為里曼葉特函數 (Riemann zeta function)。

1.181 若  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ ，證明

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{t^n F(t)}{\Gamma(n+1)} dt\right\} = \frac{f(\ln s)}{s \ln s}$$

1.182 若  $L_n(t)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ ，為拉各耳多項式 (見 162 題)，證明

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(t)}{n!} = e J_0(2\sqrt{t})$$

1.183 令  $J(a, t) = \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos au \, du$ ，(a) 證明  $\frac{\partial J}{\partial a} = -\frac{a}{2t} J$  其中  $J(0, t) = \sqrt{\pi}/2\sqrt{t}$ 。(b) 著

解出(a)之微分方程式，證明

$$J(a, t) = \int_0^{\infty} e^{-u^2 t} \cos au \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-a^2/4t}$$

1.184 利用 183 題，求  $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$  [參見 49 題]

1.185 證明  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{2}t} \sinh t \sin t}{t} dt = \frac{\pi}{8}$ .

W9 0 4 1/2

## 第二章

### 反拉卜拉士變換

#### 2.1 反拉卜拉士變換的定義

若函數  $F(t)$  的拉卜拉士變換是  $f(s)$ ，即  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則  $F(t)$  稱為  $f(s)$  的反拉卜拉士變換 (Inverse Laplace transform)，或簡稱反拉氏變換，記為  $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ ，其中  $\mathcal{L}^{-1}$  稱為反拉卜拉士變換運算子 (Inverse Laplace transformation operator)。

##### 例題 2.1

因  $\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$ ，可寫成

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

#### 2.2 反拉卜拉士變換的唯一性(勒契定理)

對於一個零積函數  $\mathcal{N}(t)$  而言，其拉氏變換為 0。(見第一章)，故若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則  $\mathcal{L}\{F(t) + \mathcal{N}(t)\} = f(s)$  亦成立，所以對於兩個不同的函數而言，它們的拉氏變換可能是相同的。

##### 例題 2.2

兩不同函數  $F_1(t) = e^{-3t}$ ， $F_2(t) = \begin{cases} 0 & t=1 \\ e^{-3t} & \text{其他} \end{cases}$

它們的拉氏變換均是  $\frac{1}{s+3}$

如果我們承認零積函數的存在，則由上可看出拉氏變換並非唯一的。但是如果我們不承認零積函數（事實上此函數幾乎不存在於任何物理現象中），則拉氏變換就是唯一存在了！此結論如下。

**定理 2-1：勒契定理 (Lerch's theorem)：**若我們將  $F(t)$  加諸兩項限制，(1) 在每個有限區間  $0 \leq t \leq N$  中， $F(t)$  為分段連續，(2) 當  $t > N$  時， $F(t)$  為指數級

，則  $f(s)$  的反拉氏變換（即  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ）為唯一。除非另有說明，否則我們通常認定此種唯一性已經具備。

### 2.3 一些反拉氏變換

下列結果乃是直接由第一頁表格中得到

反拉氏變換表

	$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	$t$
3.	$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{t^n}{n!}$
4.	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$
5.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
6.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
7.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
8.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

### 2.4 反拉氏變換的一些性質

以下列出一些反拉氏變換的重要性質。可和拉氏變換的性質 1 ~ 8 比較之。

#### 1. 線性性質

**定理 2-2：**若  $c_1, c_2$  為任意常數，且  $f_1(s), f_2(s)$  分別是  $F_1(t), F_2(t)$  的拉氏變換，則

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} &= c_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} \\ &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\end{aligned}\tag{1}$$

此結果可輕易地推廣到兩個函數以上。

#### 例題 2.3

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4} \right\} &= 4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} - 3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+16} \right\} \\
&\quad + 5 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+4} \right\} \\
&= 4e^{2t} - 3 \cos 4t + \frac{5}{2} \sin 2t
\end{aligned}$$

由於此性質，我們稱  $\mathcal{L}^{-1}$  為線性運算子 (Linear operator)，亦即  $\mathcal{L}^{-1}$  具有線性性質。

## 2. 第一平移性質

**定理 2-3:** 若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t) \quad (2)$$

### 例題 2.4

因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2} \sin 2t$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2} e^t \sin 2t$$

## 3. 第二平移定理

**定理 2-4:** 若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad (3)$$

### 例題 2.5

因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\} = \begin{cases} \sin(t-\pi/3) & \text{if } t > \pi/3 \\ 0 & \text{if } t < \pi/3 \end{cases}$$

## 4. 標度改變性質

**定理 2-5:** 若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{t}{k}\right) \quad (4)$$

## 例題 2.6

因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\} = \frac{1}{2} \cos \frac{4t}{2} = \frac{1}{2} \cos 2t$$

## 5. 導式的反拉氏變換

定理 2-6：若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} f(s)\right\} = (-1)^n t^n F(t) \quad (5)$$

## 例題 2.7

因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$  且  $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\} = -t \sin t \quad \text{即} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2} t \sin t$$

## 6. 積分式的反拉氏變換

定理 2-7：若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ，則

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u) du\right\} = \frac{F(t)}{t} \quad (6)$$

## 例題 2.8

因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = 1 - e^{-t}$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

7. 乘以  $s^n$ 

定理 2-8: 若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  且  $F(0) = 0$ , 則

$$\mathcal{L}^{-1}\{sf(s)\} = F'(t) \quad (7)$$

故乘以  $s$  的作用就等於將  $F(t)$  微分一次。

若  $F(0) \neq 0$ , 則

$$\mathcal{L}^{-1}\{sf(s) - F(0)\} = F'(t) \quad (8)$$

即

$$\mathcal{L}^{-1}\{sf(s)\} = F'(t) + F(0)\delta(t) \quad (9)$$

其中  $\delta(t)$  為單位脈衝函數。

## 例題 2.9

因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$  且  $\sin 0 = 0$ , 故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$$

可自行推廣至  $\mathcal{L}^{-1}\{s^n f(s)\}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ,

8. 除以  $s$ 

定理 2-9: 若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ , 則

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u) du \quad (10)$$

故除以  $s$  (即乘以  $1/s$ ) 之作用, 相當於將  $F(t)$  從 0 積分至  $t$ 。

## 例題 2.10

因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$ , 故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u du = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

亦可自行推廣至  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)/s^n\}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ,



## 9. 褶積性質

定理 2-10：若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  且  $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ ，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G \quad (11)$$

我們稱  $F * G$  為函數  $F$  和  $G$  的褶積 (Convolution) 或費通 (Faltung)，此定理稱為褶積定理或性質 (Convolution theorem or property)。

由 21 題可知  $F * G = G * F$ 。

## 例題 2.11

因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$  且  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \int_0^t e^u e^{2(t-u)} du = e^{2t} - e^t$$

## 2.5 計算反拉氏變換的方法

以下列出許多計算反拉氏變換的不同方法，可和第 1 章比較之。

1. 部分分式法：任何的有理函數  $P(s)/Q(s)$  (其中  $P(s)$  和  $Q(s)$  均為多項式，且  $P(s)$  的次數小於  $Q(s)$  的次數)，均可表成有理函數之和 (或稱部分分式，partial fractions)，其形式為  $\frac{A}{(as+b)^r}, \frac{As+B}{(as^2+bs+c)^r}$ ，其中  $r=1, 2, 3 \dots$  藉

著求出各個部分分式的反拉氏變換，我們即可求得  $\mathcal{L}^{-1}\{P(s)/Q(s)\}$ 。

## 例題 2.12

$$\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{2s+1}$$

## 例題 2.13

$$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}$$

$A$ 、 $B$ 、 $C$  等常數的決定，可由等號兩邊通分後（去掉分母），並比較具有相同次數的  $s$  項之係數來決定之。此法稱為黑佛塞展開公式（Heaviside expansion formula）（見下述）。其他方法可見 24～28 題。

2. 級數法：若  $f(s)$  可展開為  $s$  的負次項級數，即

$$f(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \frac{a_3}{s^4} + \cdots \quad (12)$$

則在一般情形下，我們可逐項進行反拉氏變換

$$F(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \cdots \quad (13)$$

可參見 40 題。不同於 (12) 式的級數展開亦能使用，參見 41 題。

3. 微分方程式法：參見問題 41。
4. 對某參數微分：見問題 13 及 38。
5. 利用以上定理的其他各類方法。
6. 查表法（見附錄 B）。
7. 複數反變換公式：此法為求得反拉氏變換的最有效、最直接方法，但須用到複變數理論，可參見第 6 章。

## 2.6 黑佛塞展開公式

令  $P(s)$  及  $Q(s)$  均為多項式，且  $Q(s)$  次數大於  $P(s)$  次數。假設  $Q(s)$  有  $n$  個互不相同的零點  $\alpha_k$ ， $k = 1, 2, 3 \cdots n$ ，則

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} \quad (14)$$

此法稱為黑佛塞展開定理或公式（Heaviside's expansion theorem or formula）。可參見 29～31 題。

此公式亦可應用於其他情形（見 105 及 111 題）。

## 2.7 貝他函數

若  $m > 0$ ， $n > 0$ ，定義貝他函數（Beta function）如下

$$B(m, n) = \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du \quad (15)$$

它具有下列性質（見 32 及 33 題）。

$$\begin{aligned} 1. \quad B(m, n) &= \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \\ 2. \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta &= \frac{1}{2} B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{2 \Gamma(m+n)} \end{aligned}$$

## 2.8 積分的計算

拉氏變換在計算定積分方面非常有用，可參見 35 ~ 37 題之例子。

### 附解題

#### 反拉氏變換

1.1 證明 (a)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{n+1}} \right\} = \frac{t^n}{n!}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , 其中  $0! = 1$ ,

$$(c) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} \right\} = \frac{\sin at}{a}, \quad (d) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} = \cos at, \quad (e) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - a^2} \right\} = \frac{\sinh at}{a},$$

$$(f) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - a^2} \right\} = \cosh at.$$

證 (a)  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ . 故  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}$ .

(b)  $\mathcal{L} \left\{ \frac{t^n}{n!} \right\} = \frac{1}{n!} \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{n!} \left( \frac{n!}{s^{n+1}} \right) = \frac{1}{s^{n+1}}$ . 故  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{n+1}} \right\} = \frac{t^n}{n!}$  for  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

(c)  $\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin at}{a} \right\} = \frac{1}{a} \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{1}{s^2 + a^2}$ . 故  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} \right\} = \frac{\sin at}{a}$ .

(d)  $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$ . 故  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} = \cos at$ .

(e)  $\mathcal{L} \left\{ \frac{\sinh at}{a} \right\} = \frac{1}{a} \mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{s^2 - a^2} = \frac{1}{s^2 - a^2}$ . 故  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - a^2} \right\} = \frac{\sinh at}{a}$ .

(f)  $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$ . 故  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - a^2} \right\} = \cosh at$ .

2.2 證明  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$ ，其中  $n > -1$

$$\text{證} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\right\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \cdot \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{1}{s^{n+1}}, \quad n > -1$$

上面利用到 31 題。

$$\text{故} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}, \quad n > -1, \text{ 注意: 若 } n=0, 1, 2, 3, \dots, \text{ 則 } \Gamma(n$$

$+1) = n!$  此結果和 1(b) 是一致的。

2.3 求下列各式的反拉式變換。

$$\begin{array}{llll} (a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} & (c) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} & (e) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-16}\right\} & (g) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} \\ (b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\} & (d) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} & (f) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3}\right\} & \end{array}$$

$$\text{證} \quad (a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{\sin 3t}{3}$$

[ 第 1 題(c) ]

$$(b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\} = 4e^{2t}$$

[ 第 1 題(a) ]

$$(c) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{6}$$

[ 第 1 題(b)或第 2 題 ]

$$(d) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} = \cos \sqrt{2} t$$

[ 第 1 題(d) ]

$$(e) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{s^2-16}\right\} = 6 \cosh 4t$$

[ 第 1 題(f) ]

$$(f) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3}\right\} = \frac{\sinh \sqrt{3} t}{\sqrt{3}}$$

[ 第 1 題(e) ]

$$(g) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} = \frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

[ 第 2 題 ]

### 線性、平移及標度改變性質

2.4 證明反拉氏變換具有線性性質 ( 定理 2-2 )。

證 由第 5 題得

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) \\ &= c_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} \end{aligned}$$

## 62 第二章 反拉卜拉士變換

此結果亦可輕易推廣之。(見 52 題)

2.5 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s+4}{s^3} - \frac{2s-18}{s^2+9} + \frac{24-30\sqrt{s}}{s^4} \right\}$

(b)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{2s-3} - \frac{3+4s}{9s^2-16} + \frac{8-6s}{16s^2+9} \right\}$ .

答 (a)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s+4}{s^3} - \frac{2s-18}{s^2+9} + \frac{24-30\sqrt{s}}{s^4} \right\}$   
 $= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{2s}{s^2+9} + \frac{18}{s^2+9} + \frac{24}{s^4} - \frac{30}{s^{7/2}} \right\}$   
 $= 5t + 4(t^2/2!) - 2 \cos 3t + 18(\frac{1}{3} \sin 3t) + 24(t^3/3!) - 30\{t^{5/2}/\Gamma(7/2)\}$   
 $= 5t + 2t^2 - 2 \cos 3t + 6 \sin 3t + 4t^3 - 16t^{5/2}/\sqrt{\pi}$

其中用到  $\Gamma(7/2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$ .

(b)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{2s-3} - \frac{3+4s}{9s^2-16} + \frac{8-6s}{16s^2+9} \right\}$   
 $= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s-3/2} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s^2-16/9} \right) - \frac{4}{9} \left( \frac{s}{s^2-16/9} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s^2+9/16} \right) - \frac{3}{8} \left( \frac{s}{s^2+9/16} \right) \right\}$   
 $= 3e^{3t/2} - \frac{1}{4} \sinh 4t/3 - \frac{4}{9} \cosh 4t/3 + \frac{2}{3} \sin 3t/4 - \frac{3}{8} \cos 3t/4$

2.6 證明第一平移性質：若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$$

答 由第 7 題可得  $\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$ . 故

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$$

另解：因  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$  故

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \{e^{at} F(t)\} dt = \mathcal{L}\{e^{at} F(t)\}$$

故解得  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$

2.7 計算下列各式：

(a)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s-4}{s^2-4s+20} \right\}$  (c)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+7}{s^2-2s-3} \right\}$

(b)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s+12}{s^2+8s+16} \right\}$  (d)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2s+3}} \right\}$

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s-4}{s^2-4s+20} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s-4}{(s-2)^2+16} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16} \right\} \\
 &= 6 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-2}{(s-2)^2+16} \right\} + 2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{(s-2)^2+16} \right\} \\
 &= 6 e^{2t} \cos 4t + 2 e^{2t} \sin 4t = 2 e^{2t} (3 \cos 4t + \sin 4t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s+12}{s^2+8s+16} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s+12}{(s+4)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2} \right\} \\
 &= 4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+4} \right\} - 4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+4)^2} \right\} \\
 &= 4 e^{-4t} - 4t e^{-4t} = 4 e^{-4t} (1-t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+7}{s^2-2s-3} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+7}{(s-1)^2-4} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4} \right\} \\
 &= 3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-1}{(s-1)^2-4} \right\} + 5 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s-1)^2-4} \right\} \\
 &= 3 e^t \cosh 2t + 5 e^t \sinh 2t = e^t (3 \cosh 2t + 5 \sinh 2t) \\
 &= 4 e^{3t} - e^{-t}
 \end{aligned}$$

在第 24 題中，有其他解法。

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2s+3}} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+3/2)^{1/2}} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-3t/2} \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1/2} e^{-3t/2}
 \end{aligned}$$

## 2.8 證明第二平移性質：

若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ，則  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t)$  其中

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

圖解 1：由第 9 題可得  $\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t)$$

解 2：因  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ ，故

$$\begin{aligned}
 e^{-as}f(s) &= \int_0^\infty e^{-as} e^{-st} F(t) dt = \int_0^\infty e^{-s(t+a)} F(t) dt \\
 &= \int_a^\infty e^{-su} F(u-a) du \quad [\text{letting } t+a=u]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a e^{-st}(0) dt + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} G(t) dt
\end{aligned}$$

故得證。

在此我們可將  $G(t)$  寫為  $F(t-a)U(t-a)$ ，其中  $U(t-a)$  為單位階梯函數。

## 2.9 計算下列各式：

$$(a) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-5s}}{(s-2)^4} \right\}, \quad (b) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25} \right\}, \quad (c) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1} \right\}, \quad (d) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}} \right\}.$$

因 (a) 因  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^4} \right\} = e^{2t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4} \right\} = \frac{t^3 e^{2t}}{3!} = \frac{1}{6} t^3 e^{2t}$ ，由第 8 題可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-5s}}{(s-2)^4} \right\} &= \begin{cases} \frac{1}{6} (t-5)^3 e^{2(t-5)} & t > 5 \\ 0 & t < 5 \end{cases} \\
&= \frac{1}{6} (t-5)^3 e^{2(t-5)} u(t-5)
\end{aligned}$$

$$(b) \text{ 因 } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+25} \right\} = \cos 5t,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25} \right\} &= \begin{cases} \cos 5(t-4\pi/5) & t > 4\pi/5 \\ 0 & t < 4\pi/5 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \cos 5t & t > 4\pi/5 \\ 0 & t < 4\pi/5 \end{cases} \\
&= \cos 5t u(t-4\pi/5)
\end{aligned}$$

(c) 因

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2+s+1} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}/2}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right\} \\
&= e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right)$$

故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1} \right\} &= \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) \right\} & t > \pi \\ 0 & t < \pi \end{cases} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) \right\} u(t-\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d) 因 } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+4)^{5/2}} \right\} &= e^{-4t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{5/2}} \right\} \\ &= e^{-4t} \frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{4t^{3/2} e^{-4t}}{3\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}} \right\} &= e^4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-3s}}{(s+4)^{5/2}} \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{4e^4 (t-3)^{3/2} e^{-4(t-3)}}{3\sqrt{\pi}} & t > 3 \\ 0 & t < 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4(t-3)^{3/2} e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}} & t > 3 \\ 0 & t < 3 \end{cases} \\ &= \frac{4(t-3)^{3/2} e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}} u(t-3) \end{aligned}$$

2.10 證明標度改變性質：若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F(t/k)$$

圖解 1，由第 11 題，以  $1/k$  替代  $a$ ，可得  $\mathcal{L}\{F(t/k)\} = k f(ks)$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F(t/k)$$

解 2：因  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ ，故

$$f(ks) = \int_0^\infty e^{-kst} F(t) dt = \int_0^\infty e^{-su} F(u/k) d(u/k) \quad [\text{令 } u = kt]$$



$$= \frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-su} F(u/k) du = \frac{1}{k} \mathcal{L}\{F(t/k)\}$$

$$\text{所以 } \mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F(t/k).$$

1.11 若  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$ ，求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}\right\}$  其中  $a > 0$ 。

圖 由 11 題，以  $ks$  替代  $s$ ，可得

$$\begin{aligned} \text{即 } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/ks}}{(ks)^{1/2}}\right\} &= \frac{1}{k} \frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi(t/k)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi t}} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/ks}}{s^{1/2}}\right\} &= \frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi t}} \end{aligned}$$

再令  $k = 1/a$ ，

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$$

### 導式和積分式的反拉氏變換

2.12 證明定理 2-6： $\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$

圖 因  $\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$  [參見 19 題]，故

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$$

2.13 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\}$ 。

圖 因爲  $\frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} \right\} = \frac{-2s}{(s^2 + a^2)^2}$ ，故  $\frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2 + a^2} \right)$ 。

又因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$ ，再利用 12 題可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2 + a^2} \right)\right\} \\ &= \frac{1}{2} t \left( \frac{\sin at}{a} \right) = \frac{t \sin at}{2a} \end{aligned}$$

另解；對  $a$  微分，可得

$$\frac{d}{da} \left( \frac{s}{s^2 + a^2} \right) = \frac{-2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

故

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d}{da} \left( \frac{s}{s^2 + a^2} \right) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2as}{(s^2 + a^2)^2} \right\}$$

即

$$\frac{d}{da} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{s}{s^2 + a^2} \right) \right\} = -2a \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\}$$

所以

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\} = -\frac{1}{2a} \frac{d}{da} (\cos at) = -\frac{1}{2a} (-t \sin at) = \frac{t \sin at}{2a}$$

2.14 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \ln \left( 1 + \frac{1}{s^2} \right) \right\}$ .

圖 令  $f(s) = \ln \left( 1 + \frac{1}{s^2} \right) = \mathcal{L} \{F(t)\}$ ，則  $f'(s) = \frac{-2}{s(s^2 + 1)} = -2 \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right\}$ .

所以  $\mathcal{L}^{-1} \{f'(s)\} = -2(1 - \cos t) = -tF(t)$ ,  $F(t) = \frac{2(1 - \cos t)}{t}$ .

乘以和除以  $s$  的冪次

2.15 證明定理 2-9:  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s} \right\} = \int_0^t F(u) du$ .

圖 令  $G(t) = \int_0^t F(u) du$ ，則  $G'(t) = F(t)$ ,  $G(0) = 0$ ，故

$$\mathcal{L} \{G'(t)\} = s \mathcal{L} \{G(t)\} - G(0) = s \mathcal{L} \{G(t)\} = f(s)$$

化簡得  $\mathcal{L} \{G(t)\} = \frac{f(s)}{s}$  即  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s} \right\} = G(t) = \int_0^t F(u) du$

可和 17 題比較之。

2.16 證明  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s^2} \right\} = \int_0^t \int_0^v F(u) du dv$ .

圖 令  $G(t) = \int_0^t \int_0^v F(u) du dv$  則  $G'(t) = \int_0^t F(u) du$  and  $G''(t) = F(t)$ ，但

代入得

$$\mathcal{L}\{G''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{G(t)\} - sG(0) - G'(0) = s^2 \mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

$$\text{故 } \mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s^2} \quad \text{即} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = G(t) = \int_0^t \int_0^v F(u) du dv$$

$$\text{此結果可寫成} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^t F(t) dt^2.$$

$$\text{一般而言,} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t F(t) dt^n$$

2.17 計算  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$ .

圖 因  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ , 重複利用 15 題之結論, 可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin u du = 1 - \cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1 - \cos u) du = t - \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (u - \sin u) du = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1$$

$$\text{驗算: } \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2} + \cos t - 1\right\} = \frac{1}{s^3} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s} = \frac{s^2+1+s^4-s^2(s^2+1)}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{s^3(s^2+1)}$$

2.18 已知  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t \sin t$ , 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$ .

圖 解 1: 由定理 2-9 (第 15 題), 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}u \sin u du \\ &= \left(\frac{1}{2}u\right)(-\cos u) - \left(\frac{1}{2}\right)(-\sin u) \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

解 2: 由定理 2-8, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{s \cdot \frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1-1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}t \sin t\right\} = \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t) \end{aligned}$$

$$\text{故 } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$$

2.19 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$ .

圖 利用 14 題, 可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\} = \int_0^t \frac{2(1-\cos u)}{u} du = 2 \int_0^t \frac{1-\cos u}{u} du$$

### 褶積定理

2.20 證明褶積定理 (Convolution theorem), 若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$  且  $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}=G(t)$ , 則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u) du = F * G$$

圖 欲證明上述定理, 就是等於證明下列等式

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)G(t-u) du\right\} = f(s)g(s) \quad (1)$$

其中  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ ,  $g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$ , (1)式的等號左式可化為

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} \left\{ \int_{u=0}^t F(u)G(t-u) du \right\} dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \int_{u=0}^t e^{-st} F(u)G(t-u) du dt = \lim_{M \rightarrow \infty} s_M \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad s_M = \int_{t=0}^M \int_{u=0}^t e^{-st} F(u)G(t-u) du dt \quad (2)$$

(2)式在  $tu$  平面上的積分範圍可參見圖 1-2,

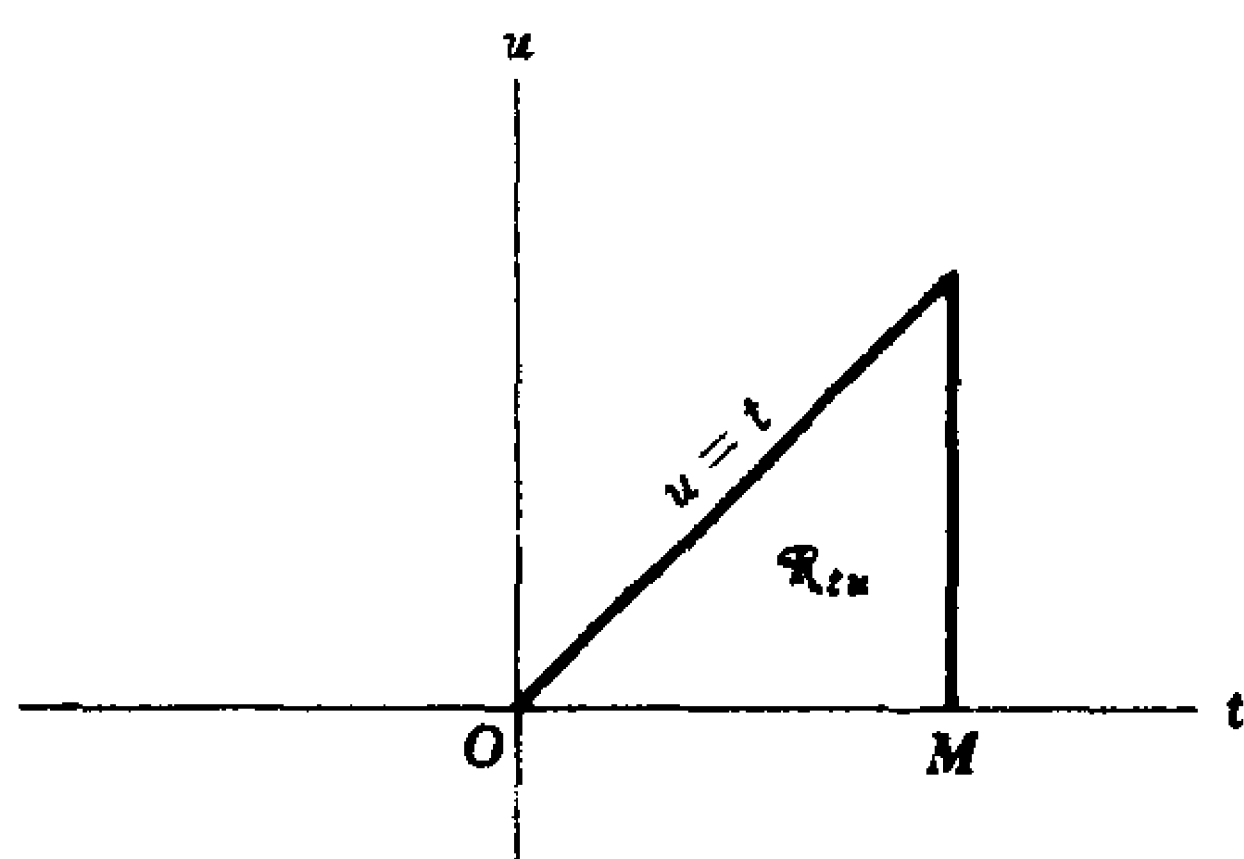


圖 2-1

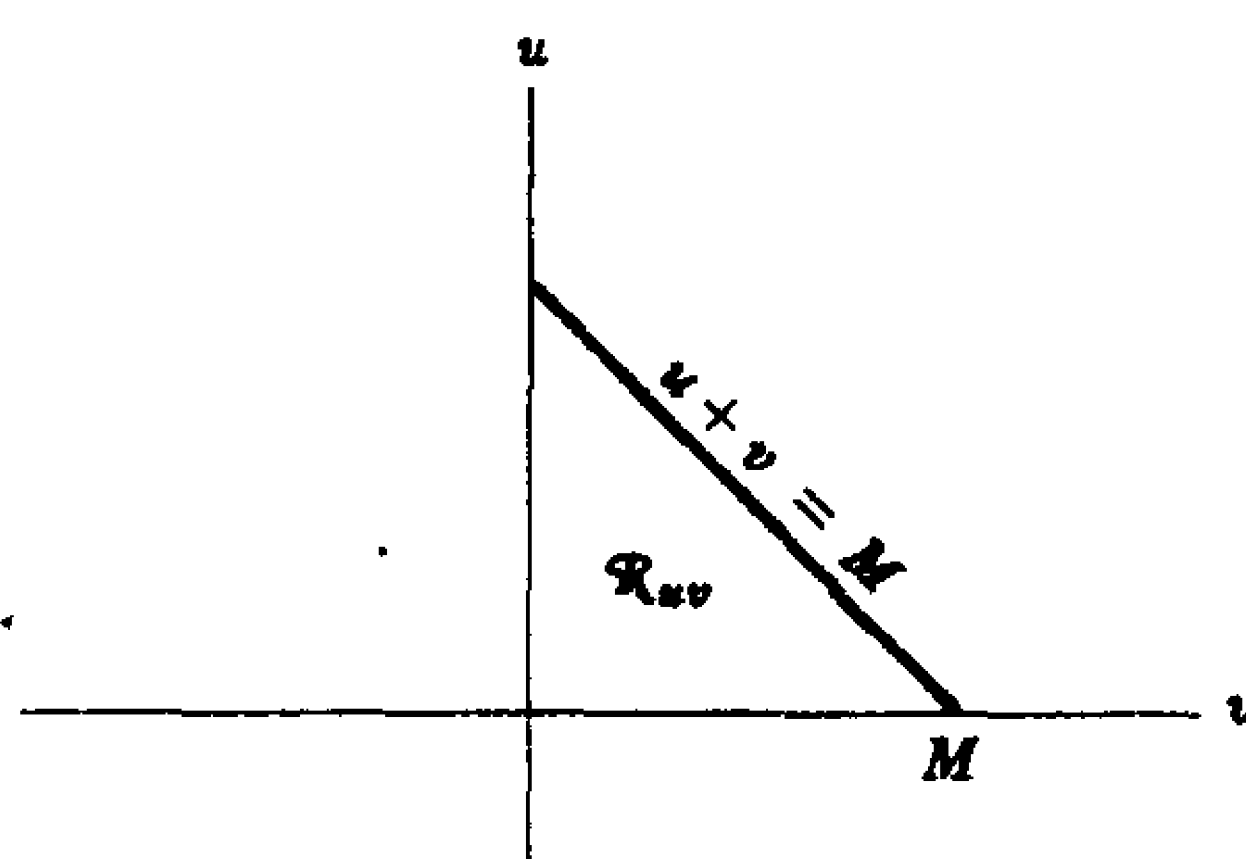


圖 2-2

令  $t-u=v$ , 即  $t=u+v$ , 則在  $tu$  平面上的陰影部分  $R_{tu}$ , 可轉換成  $uv$

平面上的陰影部分  $R_{uv}$ ，如圖 2-2 所示。再由多重積分的變數變換定理，可得

$$s_M = \iint_{R_{uv}} e^{-st} F(u) G(t-u) du dt = \iint_{R_{uv}} e^{-s(u+v)} F(u) G(v) \left| \frac{\partial(u, t)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (2)$$

其中變數轉換之亞可比行列式 (Jacobian of the transformation) 為

$$J = \frac{\partial(u, t)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

故(3)式的右邊可化成

$$s_M = \int_{v=0}^M \int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} F(u) G(v) du dv \quad (4)$$

在此定義另一新函數

$$K(u, v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)} F(u) G(v) & \text{若 } u+v \leq M \\ 0 & \text{若 } u+v > M \end{cases} \quad (5)$$

此函數定義在圖 2-3 所示的正方形中，但由(5)式可知，在方塊中非陰影部分所對應的函數值均為零。利用此函數，(4)式可改寫為

$$s_M = \int_{v=0}^M \int_{u=0}^M K(u, v) du dv$$

$$\text{故 } \lim_{M \rightarrow \infty} s_M = \int_0^\infty \int_0^\infty K(u, v) du dv$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} F(u) G(v) du dv$$

$$= \left\{ \int_0^\infty e^{-su} F(u) du \right\} \left\{ \int_0^\infty e^{-sv} G(v) dv \right\}$$

$$= f(s) g(s)$$

故得證！

我們稱  $\int_0^t F(u) G(t-u) du = F * G$  為  $F$  和  $G$  的褶積積分 (Convolution in-

tegral)，或簡稱褶積 (Convolution)。

85 題有更直接證明褶積定理的方法。

## 2.21 證明 $F * G = G * F$ 。

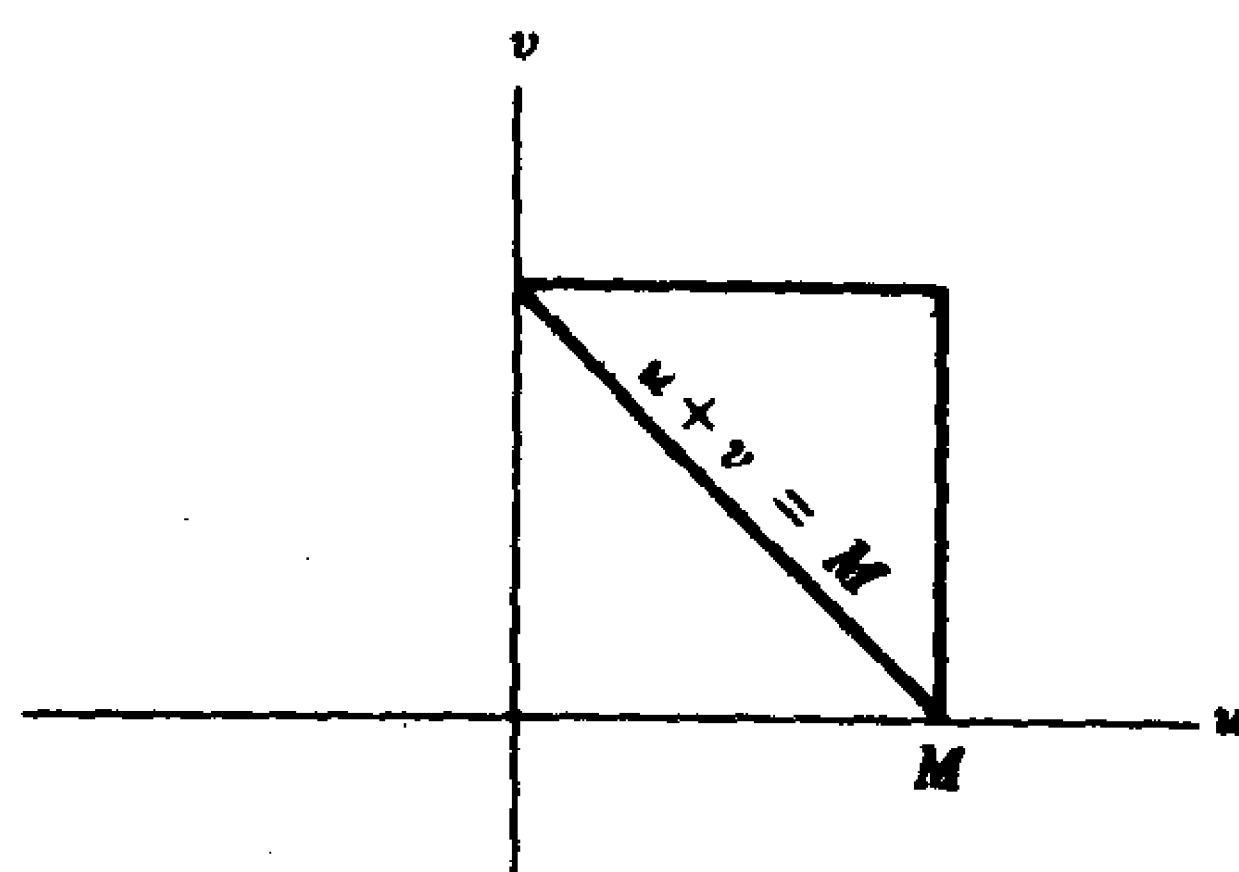


圖 2-3

圖 令  $t-u=v$  即  $u=t-v$ , 則

$$\begin{aligned} F * G &= \int_0^t F(u) G(t-u) du = \int_0^t F(t-v) G(v) dv \\ &= \int_0^t G(v) F(t-v) dv = G * F \end{aligned}$$

由此可知  $F$  和  $G$  的褶積滿足代數中的交換律 (Commutative law), 而且也滿足結合律 (Associative law) 和分配律 (Distributive law) (可參見 80 及 81 題)。

2.22 利用褶積定理, 計算下列各式。

$$(a) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\}, \quad (b) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s+1)^2} \right\}.$$

圖 (a) 可改寫成  $\frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{s}{s^2 + a^2} \cdot \frac{1}{s^2 + a^2}$ , 但  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} = \cos at$  且

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} \right\} = \frac{\sin at}{a}, \text{ 故由褶積定理可得}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\} &= \int_0^t \cos au \cdot \frac{\sin a(t-u)}{a} du \\ &= \frac{1}{a} \int_0^t (\cos au)(\sin at \cos au - \cos at \sin au) du \\ &= \frac{1}{a} \sin at \int_0^t \cos^2 au du - \frac{1}{a} \cos at \int_0^t \sin au \cos au du \\ &= \frac{1}{a} \sin at \int_0^t \left( \frac{1 + \cos 2au}{2} \right) du - \frac{1}{a} \cos at \int_0^t \frac{\sin 2au}{2} du \\ &= \frac{1}{a} \sin at \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin 2at}{4a} \right) - \frac{1}{a} \cos at \left( \frac{1 - \cos 2at}{4a} \right) \\ &= \frac{1}{a} \sin at \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin at \cos at}{2a} \right) - \frac{1}{a} \cos at \left( \frac{\sin^2 at}{2a} \right) \\ &= \frac{t \sin at}{2a} \end{aligned}$$

可和第 13 題比較之。

$$(b) \text{ 因 } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t, \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} = te^{-t}, \text{ 故由褶積定理可得,}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} &= \int_0^t (ue^{-u})(t-u) du \\
&= \int_0^t (ut - u^2) e^{-u} du \\
&= (ut - u^2)(-e^{-u}) - (t - 2u)(e^{-u}) + (-2)(-e^{-u}) \Big|_0^t \\
&= te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{驗算: } \mathcal{L}\{te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2\} &= \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} \\
&= \frac{s^2 + 2s^2(s+1) + (s+1)^2 - 2s(s+1)^2}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2(s+1)^2}
\end{aligned}$$

2.23 證明  $\int_0^t \int_0^v F(u) du dv = \int_0^t (t-u) F(u) du.$

圖 由褶積定理，若  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ ，則

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u) F(u) du\right\} = \mathcal{L}\{t\} \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{f(s)}{s^2}$$

再利用 16 題，

$$\int_0^t (t-u) F(u) du = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v F(u) du dv$$

此結果可寫成

$$\int_0^t \int_0^t F(t) dt^2 = \int_0^t (t-u) F(u) du$$

一般而言，我們可寫成（參見 83 及 84 題）

$$\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t F(t) dt^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u) du$$

## 部分分式

2.24 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

圖 解 1:  $\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$

兩邊各乘上  $(s-3)(s+1)$ ，得

$$3s + 7 = A(s+1) + B(s-3) = (A+B)s + A - 3B$$

比較係數得， $A + B = 3$  且  $A - 3B = 7$ ；解得  $A = 4$ ， $B = -1$ ，

$$\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1}$$

故

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\right\} &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 4e^{3t} - e^{-t}\end{aligned}$$

解2：(1)式兩邊乘上  $s-3$ ，並令  $s \rightarrow 3$ ，得

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{3s+7}{s+1} = A + \lim_{s \rightarrow 3} \frac{B(s-3)}{s+1} \quad \text{故} \quad A = 4$$

同理，(1)式兩邊乘以  $s+1$ ，並令  $s \rightarrow -1$ ，得

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{3s+7}{s-3} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{A(s+1)}{s-3} + B \quad \text{故} \quad B = -1$$

由此可得到和解1相同的結果。亦可參見第7題(c)。

2.25 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$ 。

圖 令

$$\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3} \quad (1)$$

利用 24 題，解2的方法，將(1)式兩邊乘以  $s+1$ ，並令  $s \rightarrow -1$ ，得

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{2s^2-4}{(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{6}$$

將(1)式兩邊乘上  $s-2$ ，並令  $s \rightarrow 2$  得

$$B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-3)} = -\frac{4}{3}$$

將(1)式兩邊乘上  $s-3$ ，並令  $s \rightarrow 3$ ，得

$$C = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)} = \frac{7}{2}$$

故

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/6}{s+1} + \frac{-4/3}{s-2} + \frac{7/2}{s-3}\right\} \\ &= -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}\end{aligned}$$

亦可使用 24 題解1的方法，但却比上法來得繁瑣。只要分母是由不同的線性（一次）因式（Distinct linear factors）所組成，就可用上法來求解。



2.26 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s^2 - 15s - 11}{(s+1)(s-2)^3} \right\}$ .

$$\text{圖} \quad \frac{5s^2 - 15s - 11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{s-2} \quad (1)$$

類似 25 題的程序，可以求得  $A$ 、 $B$  值。

將(1)式兩邊乘上  $s+1$ ，並令  $s \rightarrow -1$ ，得

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{5s^2 - 15s - 11}{(s-2)^3} = \frac{-1}{3}$$

將(1)式兩邊乘上  $(s-2)^3$ ，並令  $s \rightarrow 2$ ，得

$$B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{5s^2 - 15s - 11}{s+1} = -7$$

但同樣的方法却無法求得  $C$  及  $D$ 。然而，我們已知  $A$ 、 $B$  值，將之代入(1)式，得

$$\frac{5s^2 - 15s - 11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{-1/3}{s+1} + \frac{-7}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{s-2} \quad (2)$$

欲求  $C$ 、 $D$ ，我們可將兩不同的值代入  $s$ ，例如，令  $s=0$  及  $s=1$  分別代入上式，可得

$$\frac{11}{8} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{8} + \frac{C}{4} - \frac{D}{2}, \quad \frac{21}{2} = -\frac{1}{6} + 7 + C - D$$

即  $3C - 6D = 10$ ， $3C - 3D = 11$ ，解得  $C = 4$ ， $D = 1/3$ ，故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s^2 - 15s - 11}{(s+1)(s-2)^3} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1/3}{s+1} + \frac{-7}{(s-2)^3} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{1/3}{s-2} \right\} \\ &= -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}t^2 e^{2t} + 4t e^{2t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{aligned}$$

另解：將(2)式兩邊乘上  $s$ ，並令  $s \rightarrow \infty$ ，得  $0 = -1/3 + D$ ，即  $D = 1/3$ ，再令  $s=0$ ，即可求得  $C$ 。

此法可用於分母出現重覆的線性（一次）因式（Repeated linear factors）時。

2.27 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \right\}$ .

$$\text{圖} \quad \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \quad (1)$$

兩邊乘上  $s - 1$ ，並令  $s \rightarrow 1$ ，得  $A = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{3s+1}{s^2+1} = 2$  代入原式

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \quad (2)$$

欲求  $B$  及  $C$ ，令  $s = 0$  及  $2$ （可選用其他值）代入，則

$$-1 = -2 + C, \quad \frac{7}{5} = 2 + \frac{2B+C}{5}$$

得  $C = 1$ ， $B = -2$ ，故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1} \right\} \\ &= 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} - 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \\ &= 2e^t - 2\cos t + \sin t \end{aligned}$$

另解：將(2)式兩邊乘上  $s$ ，並令  $s \rightarrow \infty$ ，立刻可得  $B = -2$ 。

2.28 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} \right\}$ .

圖解 1：

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5} \quad (1)$$

乘上  $(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)$ ，得

$$\begin{aligned} s^2+2s+3 &= (As+B)(s^2+2s+5) + (Cs+D)(s^2+2s+2) \\ &= (A+C)s^3 + (2A+B+2C+D)s^2 + (5A+2B+2C+2D)s + 5B+2D \end{aligned}$$

即  $A+C=0$ ， $2A+B+2C+D=1$ ， $5A+2B+2C+2D=2$ ， $5B+2D=3$ 。解之，得  $B=1/3$ ， $C=0$ ， $D=2/3$ ，故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/3}{s^2+2s+2} + \frac{2/3}{s^2+2s+5} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2+1} \right\} + \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2+4} \right\} \\ &= \frac{1}{3} e^{-t} \sin t + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \\ &= \frac{1}{3} e^{-t} (\sin t + \sin 2t) \end{aligned}$$

解 2：令  $s = 0$  代入(1)： $\frac{3}{10} = \frac{B}{2} + \frac{D}{5}$

將(1)式乘上  $s$ ，並令  $s \rightarrow \infty$ ： $0 = A + C$

$$\text{令 } s = 1 : \quad \frac{3}{20} = \frac{A+B}{5} + \frac{C+D}{8}$$

$$\text{令 } s = -1 : \quad \frac{1}{2} = -A + B + \frac{D-C}{4}$$

解得  $A = 0$ ,  $B = 1/3$ ,  $C = 0$ ,  $D = 2/3$  和解 1 的值相同。

此法適用於不重覆之二次因式 (Non-repeated quadratic factors)

解 3 : 因  $s^2 + 2s + 2 = 0$  之根為  $s = -1 \pm i$ , 故

$$s^2 + 2s + 2 = (s+1-i)(s+1+i)$$

同理

$$s^2 + 2s + 5 = (s+1-2i)(s+1+2i)$$

故

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s - 2)(s^2 + 2s + 5)} &= \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1-i)(s+1+i)(s+1-2i)(s+1+2i)} \\ &= \frac{A}{s+1-i} + \frac{B}{s+1+i} + \frac{C}{s+1-2i} + \frac{D}{s+1+2i} \end{aligned}$$

解之, 得  $A = 1/6i$ ,  $B = -1/6i$ ,  $C = 1/6i$ ,  $D = -1/6i$ . 故其反拉氏變換為

$$\begin{aligned} \frac{e^{-(1-i)t}}{6i} - \frac{e^{-(1+i)t}}{6i} + \frac{e^{-(1-2i)t}}{6i} - \frac{e^{-(1+2i)t}}{6i} &= \frac{1}{3}e^{-t} \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right) + \frac{1}{3}e^{-t} \left( \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{3}e^{-t} \sin t + \frac{1}{3}e^{-t} \sin 2t \\ &= \frac{1}{3}e^{-t} (\sin t + \sin 2t) \end{aligned}$$

由此可看出, 引進複數, 可將不重覆之二次因式化為不重覆之線性 (一次) 因式。

## 黑佛塞展開公式

### 2.29 證明黑佛塞展開公式 (Heaviside's expansion formula) (14),

圈 因  $Q(s)$  為具有  $n$  個不同零點 ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ) 的多項式, 根據部分分式展開的方法, 我們可寫成

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \dots + \frac{A_k}{s-\alpha_k} + \dots + \frac{A_n}{s-\alpha_n} \quad (1)$$

兩邊乘上  $s - \alpha_k$ , 並令  $s \rightarrow \alpha_k$ , 由羅哈士比托規則可得

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)} (s - \alpha_k) = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} P(s) \left\{ \frac{s - \alpha_k}{Q(s)} \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow \alpha_k} P(s) \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \left( \frac{s - \alpha_k}{Q(s)} \right) = P(\alpha_k) \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{1}{Q'(s)} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \end{aligned}$$

故(1)式可寫成

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} \frac{1}{s - \alpha_1} + \cdots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \frac{1}{s - \alpha_k} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} \frac{1}{s - \alpha_n}$$

再取反拉氏變換，即可得證：

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} + \cdots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} e^{\alpha_n t} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

2.30 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \right\}$ .

解 令  $P(s) = 2s^2 - 4$ ,  $Q(s) = (s+1)(s-2)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6$ ,  $Q'(s) = 3s^2 - 8s + 1$ ,  
 $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 3$ , 故由29題可得

$$\frac{P(-1)}{Q'(-1)} e^{-t} + \frac{P(2)}{Q'(2)} e^{2t} + \frac{P(3)}{Q'(3)} e^{3t} = \frac{-2}{12} e^{-t} + \frac{4}{-3} e^{2t} + \frac{14}{4} e^{3t} = -\frac{1}{6} e^{-t} - \frac{4}{3} e^{2t} + \frac{7}{2} e^{3t}$$

可和25題比較之。

2.31 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \right\}$ .

解 令  $P(s) = 3s+1$ ,  $Q(s) = (s-1)(s^2+1) = s^3 - s^2 + s - 1$ ,  $Q'(s) = 3s^2 - 2s + 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,

$\alpha_2 = i$ ,  $\alpha_3 = -i$  其中用到  $s^2+1 = (s-i)(s+i)$ . 再由黑佛塞展開公式，可得所求結果

$$\begin{aligned} & \frac{P(1)}{Q'(1)} e^t + \frac{P(i)}{Q'(i)} e^{it} + \frac{P(-i)}{Q'(-i)} e^{-it} \\ &= \frac{4}{2} e^t + \frac{3i+1}{-2-2i} e^{it} + \frac{-3i+1}{-2+2i} e^{-it} \\ &= 2e^t + (-1 - \frac{1}{2}i)(\cos t + i \sin t) + (-1 + \frac{1}{2}i)(\cos t - i \sin t) \\ &= 2e^t - \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \cos t + \frac{1}{2} \sin t \\ &= 2e^t - 2 \cos t + \sin t \end{aligned} \quad (1)$$

可和27題比較之。

觀察(1)式，可發覺其最後兩項為共軛複數，這可節省許多計算過程。

## 貝他函數

2.32 證明  $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ , 其中  $m > 0$ ,  $n > 0$ 。

解 考慮  $G(t) = \int_0^1 x^{m-1} (t-x)^{n-1} dx$

WB 9304-8 BT

由褶積定理可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{G(t)\} &= \mathcal{L}\{t^{m-1}\} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} \\ &= \frac{\Gamma(m)}{s^m} \cdot \frac{\Gamma(n)}{s^n} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{s^{m+n}}\end{aligned}$$

$$\text{故 } G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{s^{m+n}}\right\} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} t^{m+n-1}$$

$$\text{即 } \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} t^{m+n-1}$$

令  $t = 1$ ，即可得證。

$$2.33 \quad \text{證明 } \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}.$$

證 由 32 題，可得

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

令  $x = \sin^2 \theta$ ，代入化簡得

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

故得證。

$$2.34 \quad \text{計算 (a) } \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta, \quad (b) \int_0^{\pi} \cos^4 \theta d\theta, \quad (c) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan \theta}}.$$

證 (a) 令  $2m-1=4$ ， $2n-1=6$  代入 33 題中，亦即以  $m=5/2$ ， $n=7/2$ ，代入，可得

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta = \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{2\Gamma(6)} = \frac{(3/2)(1/2)\sqrt{\pi} \cdot (5/2)(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}}{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3\pi}{512}$$

(b) 因  $\cos \theta$  對稱於  $\theta = \pi/2$ ，故

$$\int_0^{\pi} \cos^4 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta$$

令  $2m-1=0$ ， $2n-1=4$ ，即  $m=1/2$ ， $n=5/2$  代入 33 題，可得

$$\begin{aligned}2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta &= 2 \left[ \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(5/2)}{2\Gamma(3)} \right] \\ &= 2 \left[ \frac{\sqrt{\pi} \cdot (3/2)(1/2)\sqrt{\pi}}{2 \cdot 2 \cdot 1} \right] = \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan \theta}} = \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2} \theta \cos^{1/2} \theta d\theta$$

令  $2m-1 = -1/2$ ,  $2n-1 = 1/2$ , 即  $m = 1/4$ ,  $n = 3/4$  代入 33 題, 可得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan \theta}} = \frac{\Gamma(1/4) \Gamma(3/4)}{2 \Gamma(1)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

其中用到下列等式  $\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \pi / (\sin p\pi)$ ,  $0 < p < 1$ .

## 積分的計算

3.35 計算  $\int_0^t J_0(u) J_0(t-u) du$ .

證 令  $G(t) = \int_0^t J_0(u) J_0(t-u) du$ . 由褶積定理可得

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\{J_0(t)\} \mathcal{L}\{J_0(t)\} = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\text{故 } G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

$$\text{即 } G(t) = \int_0^t J_0(u) J_0(t-u) du = \sin t$$

2.36 證明  $\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$ .

證 令  $G(t) = \int_0^\infty \cos tx^2 dx$ . 取拉氏變換, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty \cos tx^2 dx \\ &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-st} \cos tx^2 dt \\ &= \int_0^\infty \mathcal{L}\{\cos tx^2\} dx = \int_0^\infty \frac{s}{s^2+x^4} dx \end{aligned}$$

令  $x^2 = s \tan \theta$  即  $x = \sqrt{s} \sqrt{\tan \theta}$ , 利用 34 題(c), 可化簡為

$$\frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^{\pi/2} (\tan \theta)^{-1/2} d\theta = \frac{1}{2\sqrt{s}} \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt{s}}$$

取反拉氏變換, 得

$$G(t) = \int_0^\infty \cos tx^2 dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right) \left(\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} t^{-1/2}$$

將  $t = 1$  代入，即得

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

### 其他各類問題

2.37 證明  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ .

答 令  $G(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$ ，取拉氏變換

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{s + x^2} = \frac{1}{\sqrt{s}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{s}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

再取反拉氏變換

$$G(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{\pi}{2} \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} t^{-1/2}$$

再令  $t = 1$  代入，即可得證。

另解：

令  $x^2 = u$  即  $x = \sqrt{u}$ ，則原式可化為

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

再由 32 題，以  $m = n = \frac{1}{2}$  代入，得

$$\begin{aligned} \{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 &= \int_0^1 x^{-1/2} (1-x)^{-1/2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - x)^2}} = \sin^{-1}(1-2x) \Big|_0^1 = \pi \end{aligned}$$

故，原式之值為  $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ 。可參見 29 題。

2.38 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}}\right\}$ .

答 由 34 題可知， $\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$  再對  $a$  微分，可得

$$\frac{d}{da} \mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{d}{da} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} \right\} \quad \text{即} \quad \mathcal{L} \left[ \frac{d}{da} \{J_0(at)\} \right] = \frac{-a}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\mathcal{L}\{t J_0'(at)\} = \frac{-a}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\text{故} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}} \right\} = -\frac{t}{a} J_0(at) = \frac{t J_1(at)}{a}$$

其中用到  $J'_0(u) = -J_1(u)$ 。

2.39 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 2s + 5)^{3/2}} \right\}$ .

圖 原式可改寫成

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{[(s+1)^2 + 4]^{3/2}} \right\} = e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 4)^{3/2}} \right\} = \frac{te^{-t}}{2} J_1(2t)$$

其中用到 38 題。

2.40 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-1/s}}{s} \right\}$ .

圖 利用無限級數，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} e^{-1/s} &= \frac{1}{s} \left\{ 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2! s^2} - \frac{1}{3! s^3} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2! s^3} - \frac{1}{3! s^4} + \cdots \end{aligned}$$

逐項進行反拉氏變換，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s} e^{-1/s} \right\} &= 1 - t + \frac{t^2}{(2!)^2} - \frac{t^3}{(3!)^2} + \cdots \\ &= 1 - t + \frac{t^2}{1^2 2^2} - \frac{t^3}{1^2 2^2 3^2} + \cdots \\ &= 1 - \frac{(2t^{1/2})^2}{2^2} + \frac{(2t^{1/2})^4}{2^2 4^2} - \frac{(2t^{1/2})^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots \\ &= J_0(2\sqrt{t}) \end{aligned}$$

2.41 求  $\mathcal{L}^{-1} \{e^{-\sqrt{s}}\}$ .

圖 令  $y = \mathcal{L}^{-1} \{e^{-\sqrt{s}}\}$  : 則  $y' = -\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2s^{1/2}}$ ,  $y'' = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{4s} + \frac{e^{-\sqrt{s}}}{4s^{3/2}}$ . 故

$$4s y'' + 2y' - y = 0 \quad (1)$$

在此  $y'' = \mathcal{L} \{t^2 Y\}$  故  $s y'' = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} [t^2 Y] \right\} = \mathcal{L} \{t^2 Y' + 2tY\}$ . 同理,  $y' = \mathcal{L} \{-tY\}$ .

故(1)式可寫成

$$4 \mathcal{L} \{t^2 Y' + 2tY\} - 2 \mathcal{L} \{tY\} - \mathcal{L} \{Y\} = 0 \quad \text{即} \quad 4t^2 Y' + (6t-1)Y = 0$$



再化簡得

$$\frac{dY}{Y} + \left(\frac{6t-1}{4t^2}\right) dt = 0 \quad \text{即} \quad \ln Y + \frac{3}{2} \ln t + \frac{1}{4t} = c_1$$

化簡得

$$Y = \frac{c}{t^{3/2}} e^{-1/4t}$$

乘上  $t$  得  $tY = \frac{c}{t^{1/2}} e^{-1/4t}$ . 故

$$\mathcal{L}\{tY\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{Y\} = -\frac{d}{ds}(e^{-\sqrt{s}}) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}$$

當  $t$  很大時,  $tY \sim \frac{c}{t^{1/2}}$  且  $\mathcal{L}\{tY\} \sim \frac{c\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}$ . 當  $s$  很小時,  $\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} \sim \frac{1}{2s^{1/2}}$ .

故由終值定理  $c\sqrt{\pi} = 1/2$  即  $c = 1/2\sqrt{\pi}$ , 故

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-1/4t}$$

另解：利用無限級數，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - s^{1/2} + \frac{s}{2!} - \frac{s^{3/2}}{3!} + \frac{s^2}{4!} - \frac{s^{5/2}}{5!} + \cdots\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}\{s^{1/2}\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{2!}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{3/2}}{3!}\right\} + \cdots \end{aligned} \quad (1)$$

利用第1章170題的結果（可參見第1章33題），當  $p$  為正整數或零時，下式成立

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{s^{p+1/2}\} &= \frac{t^{-p-3/2}}{\Gamma(-p-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{2p+1}{2}\right) t^{-p-3/2} \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\mathcal{L}^{-1}\{s^p\} = 0$ ，利用(2)式代入(1)，即得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} &= \frac{t^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\frac{t^{-5/2}}{3!\sqrt{\pi}} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\frac{t^{-7/2}}{5!\sqrt{\pi}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} \left\{1 - \left(\frac{1}{2^2 t}\right) + \frac{(1/2^2 t)^2}{2!} - \frac{(1/2^2 t)^3}{3!} + \cdots\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-1/4t} \end{aligned}$$

2.42 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\}$ .

答 由41題及15題可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\} &= \int_0^t \left\{\frac{1}{2\sqrt{v}} e^{-1/4v}\right\} dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv \quad (\text{令 } u = 1/4v^2) \\ &= \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\end{aligned}$$

2.43 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\}$ .

答 利用性質(4)的標度改變性質，令  $k = x^2$  代入 42 題中，得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{x^2 s}}}{x^2 s}\right\} = \frac{1}{x^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t/x^2}}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

即

此即為公式表的第 87 條。

2.44 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2 + 9)}\right\}$ .

答 因  $\frac{1}{s^2(s^2 + 9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 9}\right)$ ，故

$$\begin{aligned}\frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2 + 9)} &= \frac{1}{9}\left\{\frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2} - \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2 + 9}\right\} \\ &= \frac{1}{9}\left\{\left(2s + 10 + \frac{8}{s} + \frac{40}{s^2}\right) - \left(2s + 10 + \frac{-10s - 50}{s^2 + 9}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{9}\left\{\frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} + \frac{10s}{s^2 + 9} + \frac{50}{s^2 + 9}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2 + 9)}\right\} &= \frac{1}{9}\left(8 + 40t + 10 \cos 3t + \frac{50}{3} \sin 3t\right) \\ &= \frac{1}{27}(24 + 120t + 30 \cos 3t + 50 \sin 3t)\end{aligned}$$

亦可用部分分式的方法來做。

2.45 證明  $J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{itw} (1 - w^2)^{-1/2} dw$ .

答 由第 1 章 34 題可得

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

但

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{s + i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s - i}}$$

再利用  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+a}}\right\} = \frac{t^{-1/2}e^{-at}}{\sqrt{\pi}}$ ，故由褶積定理可得

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s-i}}\right\} \\ &= \int_0^t \frac{u^{-1/2}e^{-iu}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(t-u)^{-1/2}e^{i(t-u)}}{\sqrt{\pi}} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^t e^{i(t-2u)} u^{-1/2}(t-u)^{-1/2} du \end{aligned}$$

令  $u = tv$  代入得

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{it(1-2v)} v^{-1/2}(1-v)^{-1/2} dv$$

若令  $1-2v=w$ ，可得

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{itw} (1-w^2)^{-1/2} dw$$

2.46 證明  $J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta$ .

證 令  $w = \cos \theta$  代入 45 題的結果，則

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{it \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \sin(t \cos \theta) d\theta$$

令實部和虛部分別相等，可知最後一個積分式為零，故

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta$$

另解：

令  $G(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(t \cos \theta) d\theta$ 。取拉氏變換得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G(t)\} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{s}{s^2 + \cos^2 \theta} d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{s \sec^2 \theta}{s^2 \tan^2 \theta + s^2 + 1} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \tan^{-1} \left( \frac{s \tan \theta}{\sqrt{s^2+1}} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \end{aligned}$$

故得  $G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = J_0(t)$

### 補充題

#### 反拉氏變換

2.47 計算下列各式

$$\begin{aligned} (a) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s+4} \right\} \quad (c) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{8s}{s^2+16} \right\} \quad (e) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s-12}{s^2+8} \right\} \quad (g) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^5} \right\} \quad (i) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{12}{4-s^2} \right\} \\ (b) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2s-5} \right\} \quad (d) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{s^2-4} \right\} \quad (f) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s-5}{s^2-9} \right\} \quad (h) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{7/2}} \right\} \quad (j) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^{4/3}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{答} \quad (a) 3e^{-4t} \quad (c) 3 \cos 2\sqrt{2}t - 3\sqrt{2} \sin 2\sqrt{2}t \quad (e) -4e^{4t/3} \\ (b) \frac{1}{2}e^{5t/2} \quad (d) 2 \cosh 3t - \frac{3}{2} \sinh 3t \quad (f) (t^{-2/3} + 3t^{1/3})/\Gamma(\frac{1}{3}) \\ (g) 8 \cos 4t \quad (h) t^4/24 \\ (i) 3 \sin 2t \quad (j) 8t^{5/2}/15\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

2.48 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\sqrt{s}-1}{s} \right)^2 \right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+1}{s(s+1)} \right\}$ .

答 (a)  $1+t-4t^{3/2}/\sqrt{\pi}$  (b)  $1+e^{-t}$

2.49 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s-8}{4s^2+25} \right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s+10}{9s^2-16} \right\}$ .

答 (a)  $\frac{3}{4} \cos 5t/2 - \frac{1}{2} \sin 5t/2$  (b)  $\frac{5}{9} \cosh 4t/3 + \frac{5}{6} \sinh 4t/3$

2.50 (a) 證明函數  $F(t) = \begin{cases} t & t \neq 3 \\ 5 & t = 3 \end{cases}$  和  $G(t) = t$  具有相同的拉氏變換。

(b) 就反拉氏變換的唯一性，討論(a)的意義。

2.51 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s-8}{s^2+4} - \frac{4s-24}{s^2-16} \right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s-2}{s^{5/2}} - \frac{7}{3s+2} \right\}$ .

答 (a)  $3 \cos 2t - 4 \sin 2t - 4 \cosh 4t + 6 \sinh 4t$  \\ (b)  $6t^{1/2}/\sqrt{\pi} - 8t^{3/2}/3\sqrt{\pi} - \frac{7}{3}e^{-2t/3}$

2.52 (a) 若  $F_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\}$ ,  $F_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\}$ ,  $F_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_3(s)\}$ , 且  $c_1, c_2, c_3$  為任意常數，證明

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) + c_3 f_3(s)\} = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) + c_3 F_3(t)$$

說明上式之成立，有何限制條件，(b)將(a)之結果推廣至  $n$  個變數。

2.53 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3(s^2-1)^2}{2s^5} + \frac{4s-18}{9-s^2} + \frac{(s+1)(2-s^{1/2})}{s^{3/2}} \right\}$ .

答  $\frac{1}{2} - t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{16}t^4 + 4t^{1/2}/\sqrt{\pi} + 8t^{3/2}/3\sqrt{\pi} - 4 \cosh 3t + 6 \sinh 3t$

2.54 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+1)^5} \right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+1)^{5/2}} \right\}$ .

答 (a)  $\frac{e^{-t}}{24}(4t^3 - t^4)$ , (b)  $\frac{2t^{1/2}(3-2t)}{3\sqrt{\pi}}$

86 第二章 反拉卜拉士變換

2.55 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-14}{s^2-4s+8}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s+20}{s^2-12s+32}\right\}$ .

答 (a)  $e^{2t}(3\cos 2t - 4\sin 2t)$ , (b)  $2e^{6t}(4\cosh 2t + 7\sinh 2t) = 11e^{8t} - 3e^{4t}$

2.56 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{4s^2+12s+9}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s-2}{3s^2+4s+8}\right\}$ .

答 (a)  $\frac{3}{4}e^{-3t/2} - \frac{5}{8}te^{-3t/2}$ , (b)  $\frac{e^{-2t/3}}{15}\{25\cos 2\sqrt{5}t/3 - 24\sqrt{5}\sin 2\sqrt{5}t/3\}$

2.57 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{8s-27}}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2-4s+20}}\right\}$ .

答 (a)  $t^{-2/3}e^{27t/8}/2\Gamma(\frac{1}{3})$ , (b)  $e^{2t}J_0(4t)$

2.58 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\}$ , (c)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{\sqrt{s+1}}\right\}$ .

答 (a)  $\begin{cases} t-2 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$  或  $(t-2)u(t-2)$ , (b)  $\begin{cases} 4\sin 2(t-3) & t > 3 \\ 0 & t < 3 \end{cases}$  或  $4\sin 2(t-3)u(t-3)$

(c)  $\begin{cases} (t-1)^{-1/2}/\sqrt{\pi} & t > 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$  或  $(t-1)^{-1/2}u(t-1)/\sqrt{\pi}$ .

2.59 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2-2s+5}\right\}$ .

答 (a)  $\begin{cases} 2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)} & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$  或  $\{2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)}\}u(t-2)$

(b)  $\begin{cases} \frac{1}{2}e^{(t-3)}\sin 2(t-3) & t > 3 \\ 0 & t < 3 \end{cases}$  或  $\frac{1}{2}e^{(t-3)}\sin 2(t-3)u(t-3)$

2.60 若  $\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = f(s)$  且  $\int_0^\infty e^{-st}G(t)dt = f(ps+q)$ , 其中  $p$  和  $q$  都是常數, 求  $F(t)$  和  $G(t)$  的關係式。 答  $G(t) = e^{-qt/p}F(t/p)/p$

2.61 若  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \operatorname{erf}\sqrt{t}$  求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+a}}\right\}$ ,  $a > 0$ . 答  $\operatorname{erf}\sqrt{at}/\sqrt{a}$

2.62 若  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = J_n(t)$ , 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$ . 答  $a^n J_n(at)$

2.63 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s(s-1)}}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{\sqrt{s^2+9}}\right\}$ .

答 (a)  $e^t \operatorname{erf}\sqrt{t}$ , (b)  $\begin{cases} J_0(3t-6) & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$  或  $J_0(3t-6)u(t-2)$

## 導式及積分式的反拉氏變換

2.64 利用定理 2-6, 求

(a)  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^3\}$ , 但已知  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)\} = e^{at}$ ,

(b)  $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2-a^2)^2\}$ , 但已知  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2-a^2)\} = (\sinh at)/a$ .

2.65 利用下式  $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$  求  $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^n\}$  其中  $n=2, 3, 4, \dots$  進而求出  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^n\}$ 。

2.66 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$ . 答  $\frac{1}{2}te^{-t}\sin t$

2.67 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\}$ .

答 (a)  $(e^{-t}-e^{-2t})/t$ , (b)  $\int_0^t \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u} du$

2.68 求  $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(2/s^2)\}$ . 答  $2 \sin t \sinh t/t$

2.69 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right\}$ . 答  $\int_0^t \frac{\cos au - \cos bu}{u} du$

乘以及除以  $s$  的冪次

2.70 證明  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^3}\right\} = \int_0^t \int_0^v \int_0^w F(u) du dv dw$ .

上面之積分式可寫成  $\int_0^t \int_0^t \int_0^t F(t) dt^3$  嗎? 解釋之。

2.71 計算 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s+1)}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2(s+3)}\right\}$ , (c)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^3}\right\}$ .

答 (a)  $1-t+\frac{1}{2}t^2-e^{-t}$ , (b)  $\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}e^{-3t}$ , (c)  $1-e^{-t}(1+t+\frac{1}{2}t^2)$

2.72 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+4}}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$ .

答 (a)  $\frac{1}{2}\operatorname{erf}(2\sqrt{t})$ , (b)  $\int_0^t J_0(au) du$

2.73 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^5(s+2)}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)^5(s+1)}\right\}$  並討論以上兩者之答案有何關係存在。

答 (a)  $\frac{e^t}{72}\left(t^4-\frac{4}{3}t^3+\frac{4}{3}t^2-\frac{8}{9}t+\frac{8}{27}\right)-\frac{e^{-2t}}{243}$

$$(b) e^{2t} \left( \frac{t^4}{36} + \frac{t^3}{54} - \frac{t^2}{54} + \frac{t}{81} - \frac{1}{243} \right) + \frac{e^{-t}}{243}$$

2.74 若  $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ , 證明

$$(a) \mathcal{L}^{-1}\{s f(s)\} = -t F'(t) - F(t) \quad (c) \mathcal{L}^{-1}\{s^2 f''(s)\} = t^2 F''(t) + 4t F'(t) + 2F(t)$$

$$(b) \mathcal{L}^{-1}\{s f'(s)\} = t^2 F'(t) + 2t F(t)$$

2.75 證明  $\mathcal{L}^{-1}\{s^2 f'(s) + F(0)\} = -t F''(t) - 2F'(t)$ .

### 褶積定理

2.76 利用褶積定理, 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\}$ .

$$\text{答} \quad (a) \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t}), \quad (b) \frac{1}{16}(e^{2t} - e^{-2t} - 4te^{-2t})$$

2.77 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ .  $\text{答} \quad \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t})$

2.78 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$ .  $\text{答} \quad \frac{1}{2}t \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t$

2.79 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$ .

$$\text{答} \quad (a) \frac{1}{8}\{(3-t^2)\sin t - 3t \cos t\}, \quad (b) \frac{1}{64}t(\sin 2t - 2t \cos 2t)$$

2.80 證明  $F * \{G * H\} = \{F * G\} * H$ , 亦即證明褶積滿足結合律。

2.81 證明 (a)  $F * \{G + H\} = F * G + F * H$ , (b)  $\{F + G\} * H = F * H + G * H$ .

2.82 證明  $1 * 1 * 1 * \dots * 1$  ( $n$  個 1)  $= t^{n-1} / (n-1)!$  其中  $n = 1, 2, 3, \dots$

2.83 證明  $\int_0^t \int_0^t \int_0^t F(t) dt^3 = \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!} F(u) du$ .

2.84 證明  $\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t F(t) dt^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u) du$ .

2.85 直接證明下列式子, 並藉此證明褶積定理

$$\begin{aligned} f(s) g(s) &= \left\{ \int_0^\infty e^{-su} F(u) du \right\} \left\{ \int_0^\infty e^{-sv} G(v) dv \right\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} F(u) G(v) du dv \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t F(u) G(t-u) du \right\} dt. \end{aligned}$$

2.86 由褶積定理證明下式

$$\int_0^t \sin u \cos(t-u) du = \frac{1}{2} t \sin t$$

2.87 證明

$$\frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{e^{(a-b)u}}{\sqrt{u(t-u)}} du = e^{(a-b)t/2} I_0\left(\frac{1}{2}(a-b)t\right).$$

## 部分分式

2.88 利用部分分式，求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$ ，(b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^3-s}\right\}$ 。

答 (a)  $5e^{3t} - 2e^{-2t}$ ，(b)  $1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$

2.89 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$ ，(b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$ 。

答 (a)  $\frac{1}{2}e^{-t/2} - \frac{1}{3}e^{-2t/3}$ ，(b)  $5e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t/2} + 2e^{-t}$

2.90 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$ ，(b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64}\right\}$ 。

答 (a)  $3e^{-4t} - 3\cos 3t$ ，(b)  $\frac{1}{2}\sin 4t + \cos 2t - \sin 2t$

2.91 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$ 。 答  $\frac{1}{5}e^{-t}(4\cos t - 3\sin t) - \frac{1}{5}e^{-3t}$

2.92 求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$ ，(b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3-3s^2-40s+36}{(s^2-4)^2}\right\}$ 。

答 (a)  $\frac{1}{2}(2t-1)e^t + \frac{3}{2}e^{-t}$ ，(b)  $(5t+3)e^{-2t} - 2te^{2t}$

2.93 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$ 。

答  $\frac{3}{50}e^{3t} - \frac{1}{25}e^{-2t} - \frac{1}{50}e^{-t}\cos 2t + \frac{9}{25}e^{-t}\sin 2t$

2.94 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$ 。 答  $\frac{1}{2}\sin t \sinh t$

2.95 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$ 。 答  $\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t - te^{-t}$

2.96 利用部分分式來計算(a) 44 題，(b) 71 題，(c) 73 題，(d) 7 題，(e) 77 題。

2.97 79 題(a)及 79 題(b)是否能以部分分式解之？解釋之。

## 黑佛塞展開公式



90 第二章 反拉卜拉士變換

2.98 利用黑佛塞展開公式，求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\}$ ，(b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\}$ 。

答 (a)  $3e^{-2t} - e^{3t}$ ，(b)  $5e^{2t} - 3e^{-t} - 2e^{-3t}$

2.99 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$ 。 答  $\frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{5}{2}e^{3t}$

2.100 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ 。 答  $2e^{-t} + 3\sin t - 2\cos t$

2.101 利用黑佛塞展開公式求(a) 76 題(a)，(b) 77 題，(c) 88 題，(d) 89 題，(e) 90 題。

2.102 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$  和 91 題比較之。

2.103 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$  和 93 題比較之。

2.104 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$  和 94 題比較之。

2.105 若  $f(s) = P(s)/Q(s)$ ，其中  $P(s)$  及  $Q(s)$  均為多項式（如同 29 題），但  $Q(s) = 0$  有  $m$  重根  $s = a$ ，其他  $s = b_1, b_2, \dots, b_n$  均不相同。

(a) 證明

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s-a)^m} + \frac{A_2}{(s-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{s-a} + \frac{B_1}{s-b_1} + \frac{B_2}{s-b_2} + \dots + \frac{B_n}{s-b_n}$$

(b) 證明  $A_k = \lim_{s \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^k}{ds^k} \{(s-a)^m f(s)\}$ ， $k = 1, 2, \dots, m$ 。

(c) 證明  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{at} \left\{ \frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + A_m \right\} + B_1 e^{b_1 t} + \dots + B_n e^{b_n t}$ 。

2.106 利用 105 題，求 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$ ，(b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)^2}\right\}$ 。

答 (a)  $(3t-2)e^t + 4e^{-3t}$ ，(b)  $t(e^{-t} - e^{-2t})$

2.107 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{11s^3-47s^2+56s+4}{(s-2)^3(s+2)}\right\}$ 。 答  $(2t^2-t+5)e^{2t} + 6e^{-2t}$

2.108 利用 105 題求(a) 26 題，(b) 44 題，(c) 71 題，(d) 73 題，(e) 76 題(b)。

2.109 利用 105 題的方法，可否求出 79 題(a)及 79 題(b)？解釋之。

2.110 利用 65 題求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$  和 95 題比較之。

2.111 在分母含重覆之二次因式時，導出黑佛塞展開公式。

2.112 利用 111 題導出之方法，求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 8s + 2}{(s-1)(s^2+2s+2)^2} \right\}$

答  $e^t + e^{-t} \{ (3-2t) \cos t - 3 \sin t \}$

### 貝他函數

2.113 計算下列各式 (a)  $\int_0^1 x^{3/2} (1-x)^2 dx$ , (b)  $\int_0^4 x^3 (4-x)^{-1/2} dx$ , (c)  $\int_0^2 y^4 \sqrt{4-y^2} dy$

答 (a) 16/315, (b) 4096/35, (c)  $2\pi$

2.114 證明  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi/4$ .

2.115 計算下列各式 (a)  $\int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta d\theta$ , (b)  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^4 \theta d\theta$ , (c)  $\int_0^{\pi} \sin^4 \theta \cos^4 \theta d\theta$ .

答 (a)  $5\pi/32$ , (b)  $\pi/32$ , (c)  $3\pi/128$

2.116 證明

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^p \theta d\theta = \begin{cases} (a) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots p} \frac{\pi}{2}, & p \text{ 爲正偶數} \\ (b) \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (p-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p}, & p \text{ 爲正奇數} \end{cases}$$

2.117 已知  $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ , 證明  $\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$  其中  $0 < p < 1$ 。

[提示：令  $x/(1+x) = y$ 。]

2.118 利用 117 題，證明  $\int_0^\infty \frac{y^2 dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 。

2.119 證明  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ 。

### 積分之計算

2.120 證明  $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$ 。

2.121 證明  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . 答  $\pi/2$

9.2 第二章 反拉卜拉士變換

2.122 證明  $\int_0^\infty x \cos x^3 dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3} \Gamma(1/3)}$ .

2.123 證明若  $0 < p < 1$ , 則 (a)  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2 \Gamma(p) \sin(p\pi/2)}$

(b)  $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2 \Gamma(p) \cos(p\pi/2)}$ .

2.124 利用 123 題之結果, 驗證 120, 121 及 122 題。

2.125 (a) 證明  $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$  收斂

(b) 若  $t > 0$ , 是否  $\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty x^2 e^{-tx^2} dx\right\} = \int_0^\infty \mathcal{L}\{x^2 e^{-tx^2}\} dx$ ?

(c) 37 題的方法是否可應用於(a)之積分? 解釋之。

2.126 計算  $\int_0^t J_0(u) J_1(t-u) du$ . 圖  $J_0(t) - \cos t$

其他各類問題

2.127 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}$ . 圖  $\frac{1}{3}\left\{e^{-t} - e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$

2.128 證明  $\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q dx = (b-a)^{p+q+1} B(p+1, q+1)$  其中  $p > -1$ ,  $q > -1$  且  $b > a$ 。[提示: 令  $x-a = (b-a)y$ ]

2.129 計算 (a)  $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$ , (b)  $\int_1^5 \sqrt[4]{(5-x)(x-1)} dx$ . 圖 (a)  $\pi$ , (b)  $\frac{2\{\Gamma(1/4)\}^2}{3\sqrt{\pi}}$

2.130 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}$ . 圖  $\{1 - \cos(t-1)\}u(t-1) - \{1 - \cos(t-2)\}u(t-2)$

2.131 證明  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$ .

2.132 證明  $\int_0^t J_0(u) \sin(t-u) du = \frac{1}{2}t J_1(t)$ .

2.133 (a) 證明函數  $f(s) = \frac{1-e^{-2\pi s}}{s}$  之零點有無限多個(在此  $s$  為複數)。這些使  $f(s) = 0$  之  $s$  值為何? (b) 求  $f(s)$  之反拉氏變換。

WB 934 18 24

圖 (a)  $s = \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \dots$  (b)  $F(t) = \begin{cases} 1 & t > 2\pi \\ 0 & 0 < t < 2\pi \end{cases}$  or  $F(t) = u(t - 2\pi)$

2.134 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s + \sqrt{s^2 + 1}}{2s}\right)\right\}$ . 圖  $\frac{1 - J_0(t)}{t}$

2.135 證明  $\int_0^2 u(8 - u^3)^{1/3} du = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$ .

2.136 當  $t$  為無理數時,  $F(t) = t^2$ ;  $t$  為有理數時,  $F(t) = t$ .

(a) 證明  $L\{F(t)\} = 2/s^3, s > 0$ .

(b) 由反拉氏變換的唯一性, 討論(a)式的意義。

2.137 說明如何應用級數去計算下列各式 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2 + 1)\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1 + 1/s)\}$ ,

(c)  $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(1/s)\}$ .

2.138 求  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-3s - 2\sqrt{s}}\}$ . 圖  $\frac{1}{\sqrt{\pi(t-3)^3}} e^{-1/(t-3)} u(t-3)$

2.139 證明  $\int_0^\infty \frac{u \sin tu}{1 + u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-t}, t > 0$ .

2.140 若  $F(t) = t^{-1/2}, t > 0$  且  $G(t) = \begin{cases} t^{-1/2} & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$ , 證明

$$F(t) * G(t) = \begin{cases} \pi & 0 < t < 1 \\ \pi - 2 \tan^{-1} \sqrt{t-1} & t > 1 \end{cases}$$

2.141 證明  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s+1} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+1} + \sqrt{s}}\right\} = \frac{e^{-t/2} I_1(t/2)}{t}$ .

2.142 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s}}{s-1}\right\}$ . 圖  $t^{-1/2}/\sqrt{\pi} + e^t \operatorname{erf} \sqrt{t}$

2.143 證明 (a)  $\int_0^{\pi/2} \sin(t \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \sin(t/2) J_0(t/2)$

(b)  $\int_0^{\pi/2} \cos(t \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \cos(t/2) J_0(t/2)$ .

2.144 若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  之週期為  $T > 0$ , 證明

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)(1 - e^{-sT})\} = \begin{cases} F(t), & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

2.145 (a) 證明  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 + 1}\right\} = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^8}{8!} - \frac{t^{11}}{11!} + \dots$ .

94 第二章 反拉卜拉士變換

(b) 討論(a)之結果和 127 題有何關聯。

2.146 黑佛塞展開公式是否可用於  $f(s) = 1/(s \cosh s)$  ? 解釋之。

2.147 證明  $\int_0^\infty J_0(x^2) dx = 1/4\sqrt{\pi}$ .

2.148 證明 
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \sin \frac{1}{s}\right\} = t - \frac{t^3}{(3!)^2} + \frac{t^5}{(5!)^2} - \frac{t^7}{(7!)^2} + \cdots$$
$$= \frac{i}{2} \{J_0(2e^{\pi i/4} \sqrt{t}) - J_0(2e^{-\pi i/4} \sqrt{t})\}$$

2.149 證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cos \frac{1}{s}\right\} = 1 - \frac{t^2}{(2!)^2} + \frac{t^4}{(4!)^2} - \frac{t^6}{(6!)^2} + \cdots$$

2.150 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+\sqrt{s}}\right\}$ . 答  $t^{-1/2}/\sqrt{\pi} - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t})$

2.151 證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+e^{-s}}\right\} = \sum_{n=0}^{[t]} \frac{(-1)^n (t-n)^n}{n!}$$

其中  $[t]$  代表小於或等於  $t$  的最大整數。

2.152 證明 
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} J_0\left(\frac{2}{\sqrt{s}}\right)\right\} = 1 - \frac{t}{(1!)^3} + \frac{t^2}{(2!)^3} - \frac{t^3}{(3!)^3} + \cdots$$

# 第三章

## 在微分方程式方面的應用

### 3.1 常係數常微分方程式

拉氏變換常應用於線性之常係數常微分方程式。例如，若我們要解下面的二階線性微分方程式：

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \alpha \frac{dY}{dt} + \beta Y = F(t) \quad \text{或} \quad Y'' + \alpha Y' + \beta Y = F(t) \quad (1)$$

其中  $\alpha$ ， $\beta$  為常數，乃由起始或邊界條件 (Initial or boundary conditions) 所決定，

$$Y(0) = A, \quad Y'(0) = B \quad (2)$$

其中  $A$ ， $B$  為已知之常數。將(1)式取拉氏變換，並將(2)式代入，我們可得用以求  $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$  的代數方程式。所求之答案即為  $y(s)$  的反拉氏變換。此方法可輕易地推廣至高階的微分方程式，參見 1 ~ 8 題。

### 3.2 變係數常微分方程式

拉氏變換亦可用於某些係數為變數 (Variable) 的常微分方程式。若微分方程式中每一項的形式均如下所示，則可以拉氏變換解之。

$$t^m Y^{(n)}(t) \quad (3)$$

其拉氏變換為

$$(-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \mathcal{L}\{Y^{(n)}(t)\} \quad (4)$$

可參見第 1 章定理 1-10 及定理 1-12。

詳細解答過程，見 9 ~ 11 題。

### 3.3 聯立常微分方程式

拉氏變換亦可用於兩個（或兩個以上）聯立常微分方程式，其過程和前面所講的方法是相同的。參見 12 及 13 題。

### 3.4 在力學方面的應用

假定一質量  $m$ ，連接至一固定於  $O$  的彈簧，且  $m$  可在無摩擦的平面  $PQ$  上自由滑動。若  $X(t)$ （或直接寫成  $X$ ）代表質量  $m$  在時間  $t$ -時，相對於平衡點或靜止點（Equilibrium or rest position）的位移，則存在一回復力（Restoring force）作用於  $m$ ，其大小為  $-kX$ ，其中  $k$  為依彈簧而變的常數稱為彈簧常數（spring constant）。

以上稱為虎克定律（Hooke's law），乃是根據實驗而得，它說明彈簧的回復力正比於彈簧自平衡點伸展（或壓縮）的程度。再由牛頓定理（Newton's law），即作用於  $m$  的淨力等於質量和加速度的乘積，我們可得運動方程式如下：

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -kX \quad \text{或} \quad mX'' + kX = 0 \quad (5)$$

若存在一個正比於  $m$  之瞬时速度的阻滯力（Damping force），則運動方程式變為

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -kX - \beta \frac{dX}{dt} \quad \text{或} \quad mX'' + \beta X' + kX = 0 \quad (6)$$

其中比例常數  $\beta$  稱為阻滯常數（Damping constant）

若某些隨時間而變的外力  $F(t)$  亦作用於  $m$ ，則須將運動方程式修正如下：

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -kX - \beta \frac{dX}{dt} + F(t) \quad \text{或} \quad mX'' + \beta X' + kX = F(t) \quad (7)$$

將拉氏變換應用於(5)，(6)或(7)式，並代入適當的起始條件（和物理性質有關），則可解得  $X(t)$ 。參見 14，15，27 及 28 題。

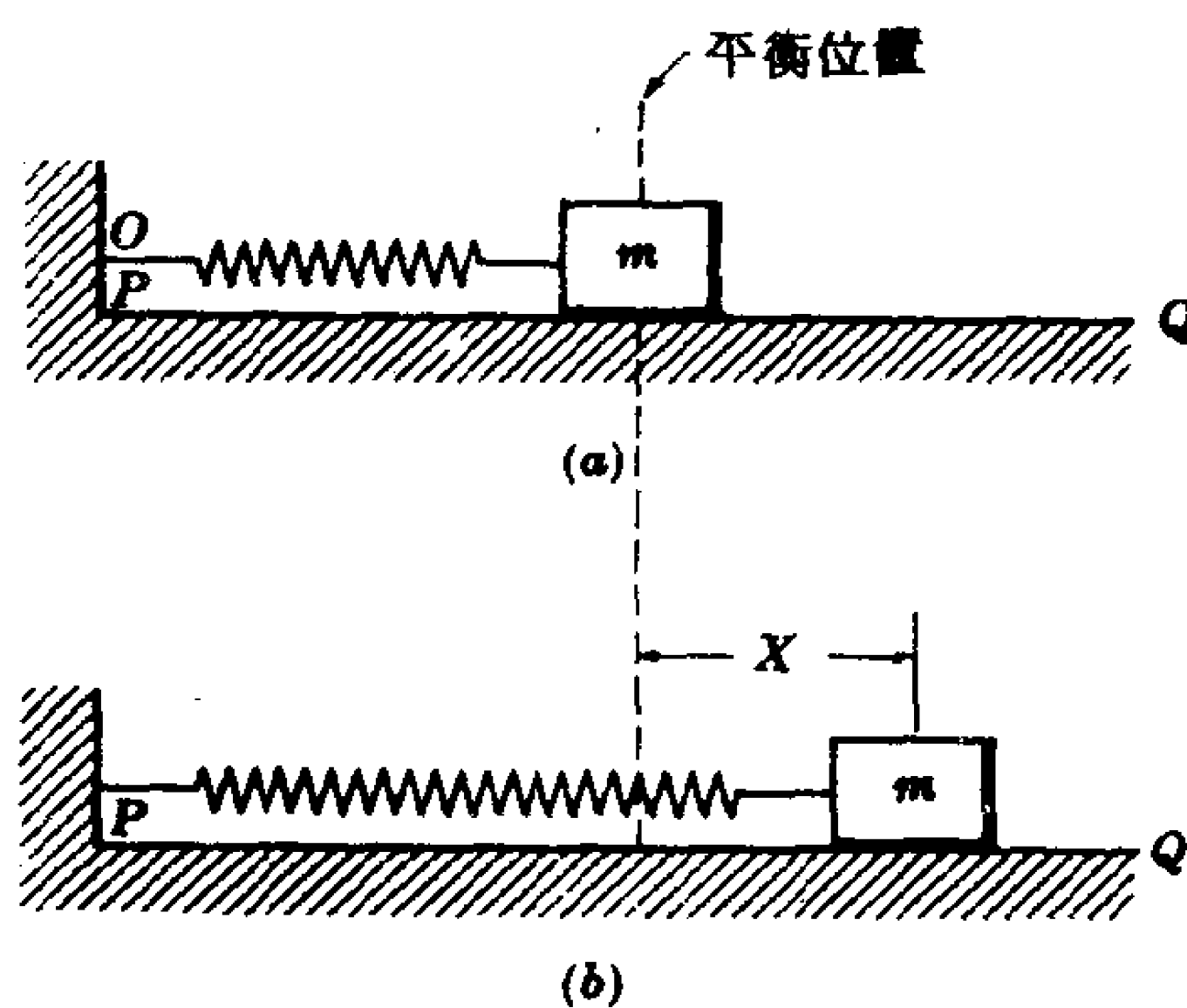
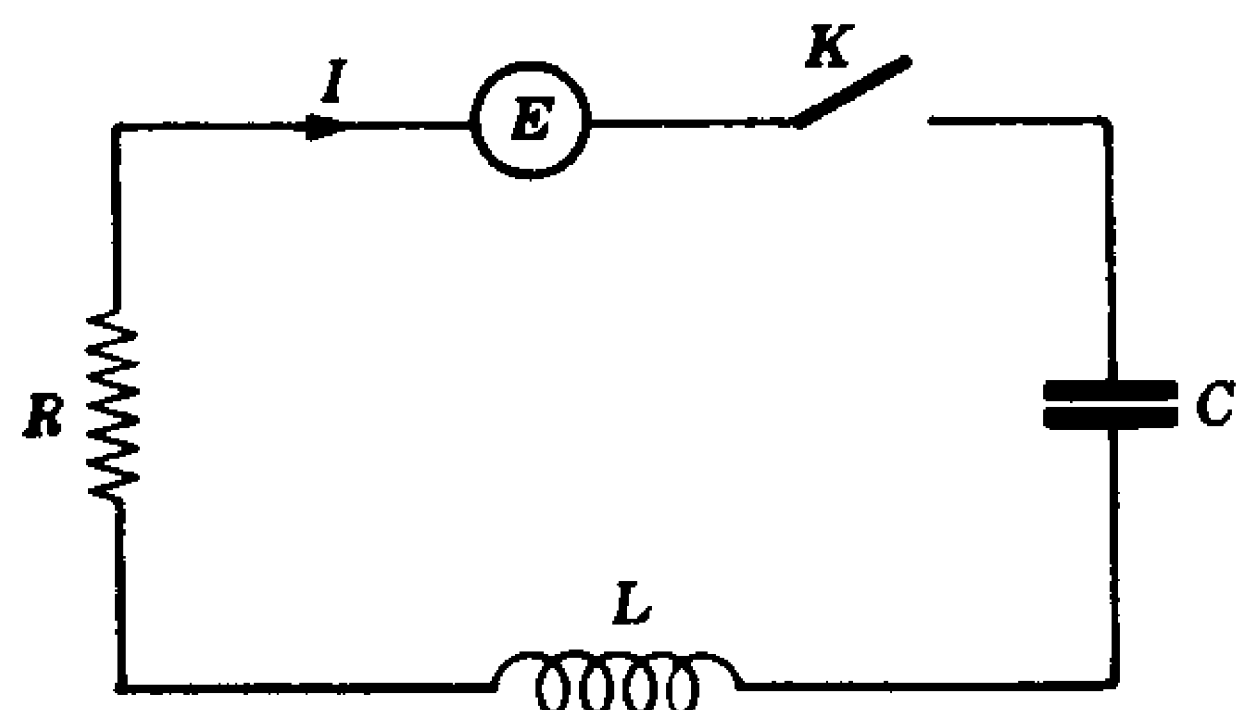


圖 3-1

### 3.5 在電路方面的應用

圖 3-2 爲一簡單的電路，包含一個開關或按鍵 ( Switch or key )  $K$ ，如以下各電路元件 ( Circuit elements ) 的串聯 ( Series )：

1. 一個電源 ( Generator ) 或電池 ( Battery )，供應電動勢 ( Electromotive force ) 或 e.m.f.，以  $E$  ( 伏特，volts ) 表之，
2. 一個電阻 ( Resistor )，具有電阻值 ( Resistance )  $R$  ( 歐姆，ohms )，
3. 一個電感 ( Inductor )，具有電感值 ( Inductance )  $L$  ( 亨利，henrys )，
4. 一個電容 ( Capacitor )，具有電容值 ( Capacitance )  $C$  ( 法拉，farads )。

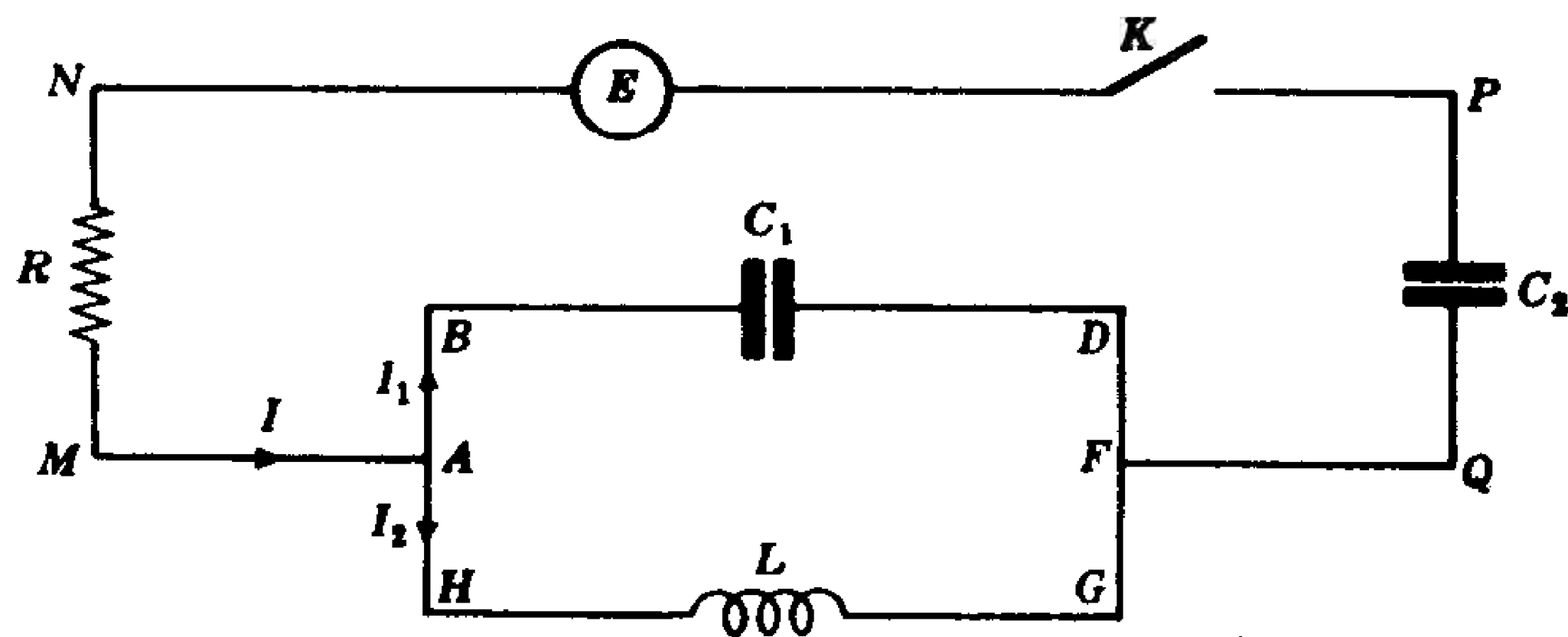


■ 3-2

電路元件以符號表示，如圖 3-2 所示。

當開關或按鍵  $K$  按下時，電路導通，電荷  $Q$  ( 庫侖，Coulombs ) 將流至電容板，其電荷對時間之變率，寫成  $\frac{dQ}{dt} = I$ ，稱爲電流 ( Current )，其中  $I$  的單位爲安培 ( Amperes )，而  $t$  以秒爲單位。

較複雜之電路，如圖 3-3 所示，亦可能在實際狀況中碰到。



■ 3-3

在一電路中，最重要的是要知道電容上面電荷的大小，及電流隨時間而變的情形。我們定義橫跨於一電路元件的電位差 ( Potential drop ) 或電壓降 ( Voltage drop，簡稱壓降 ) 如下：



$$(1) \text{ 電阻的壓降} = RI = R \frac{dQ}{dt}$$

$$(2) \text{ 電感的壓降} = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2Q}{dt^2}$$

$$(3) \text{ 電容的壓降} = \frac{Q}{C}$$

$$(4) \text{ 電源的壓降} = -\text{壓升} = -E$$

相關的微分方程式則可由克希荷夫定律導出。

### 克希荷夫定律

1. 流入任何接點（例如圖 3-3 的 A 點）的電流代數和為零。
2. 任何閉迴路（例如圖 3-3 的  $ABDFGHA$  或  $ABDFQPNMA$ ）的壓降代數和為零。

以圖 3-2 的電路為例，應用此定律是非常容易的（第一定律在此例是多餘的）。利用第二定律，可得  $Q$  的微分方程式：

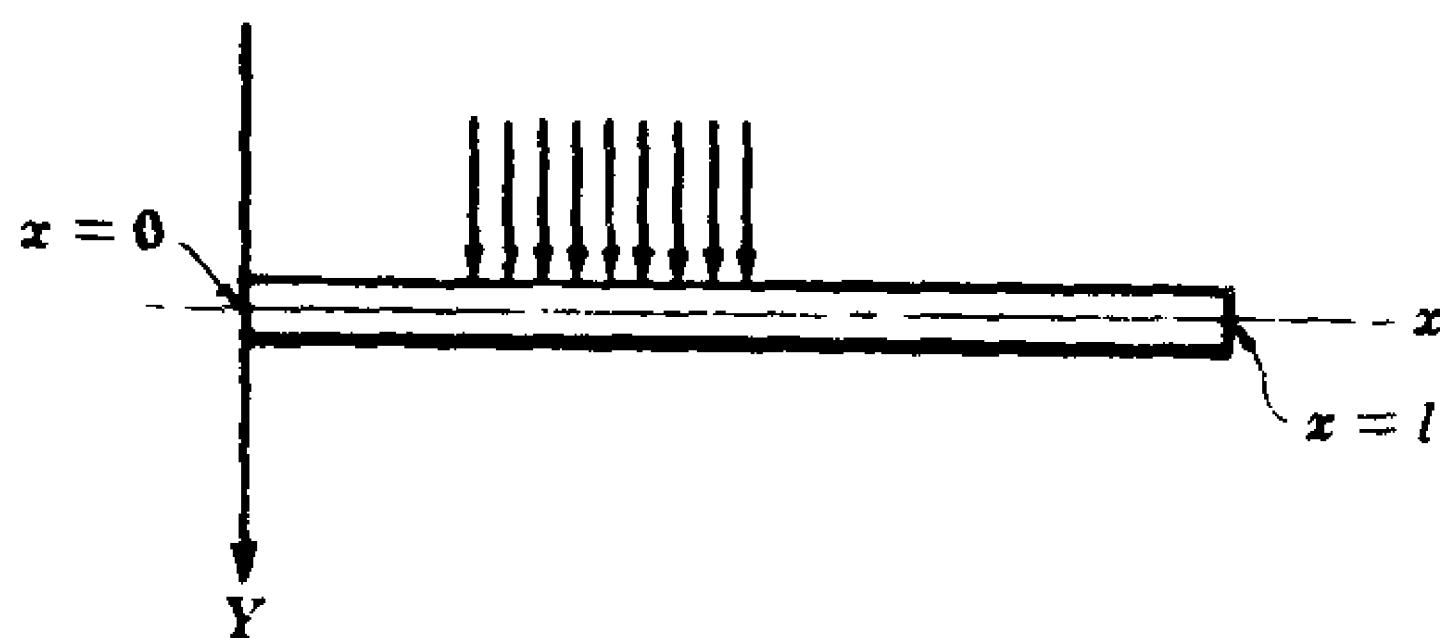
$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E \quad (8)$$

將此定律應用在圖 3-3 的電路，可得兩個聯立方程式（見 17 題）。

由上可發現到(7)式和(8)式的相關性，比較後可明顯看出質量  $m$  對應於電感  $L$ ，位移  $X$  對應於電荷  $Q$ ，阻滯因素  $\beta$  對應於電阻  $R$ ，彈性常數對應於電容之倒數  $1/C$ ；施力  $F$  對應於電動勢  $E$ 。此種類比在實用上很方便。

### 3.6 橫樑方面的應用

假設有一橫樑和  $X$  軸重合，且其端點在  $x = 0$  及  $x = L$ 。（圖 3-4）。若有一負載垂直施於橫樑，其大小為每單位長  $W(x)$ ，則此橫樑的軸在點  $x$  時會產生向下的偏移  $Y(x)$ ，並滿足下列微分方程式：



■ 3-4

$$EI \frac{d^4Y}{dx^4} = W(x) \quad 0 < x < l \quad (9)$$

此種橫向的偏移稱為**撓度曲線** (Deflection curve) 或**彈性曲線** (Elastic curve)。  $EI$  稱為橫樑之**彎度剛性** (Flexural rigidity)，且我們假設其值為常數（事實上， $E$  是橫樑的楊氏彈性係數，Young's modulus of elasticity，而  $I$  為橫樑橫切面對軸所產生的慣性矩。 $EIY''(x)$  及  $EIY'''(x)$  分別稱為在  $x$  的**彎矩** (Bending moment) 及**垂直剪力** (Vertical shear)。法意在此定義  $y$  軸向下為正，故偏移向下為正。

(9) 式微分方程式的邊界條件，依橫樑被支承的方式而有不同。最常見的情形如下：

1. 固定支承 (Clamped, Built-in or Fixed End) :  $Y = Y' = 0$
2. 鉸支承 (Hinged or Simply-Supported End) :  $Y = Y'' = 0$
3. 自由端 (Free End) :  $Y'' = Y''' = 0$

### 3.7 偏微分方程式

拉氏變換亦可應用於各種受制於邊界條件的偏微分方程式。此類問題多稱為**邊界值問題** (Boundary-value problems)。在本章中，我們將會碰到幾題較簡單的這類問題（參見 22～26 題及 31 題）。第 8 章對於邊界值問題有較完整的討論，其中亦使用到第 6 章所提到的複數反變換公式。

## 附解題

### 常係數常微分方程式

3.1 解  $Y'' + Y = t$ ,  $Y(0) = 1$ ,  $Y'(0) = -2$ .

圖 對微分方程式取拉氏變換，並代入已知條件，得

$$\mathcal{L}\{Y''\} + \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{t\}, \quad s^2y - sY(0) - Y'(0) + y = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2y - s + 2 + y = \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad y = \mathcal{L}\{Y\} &= \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right\} = t + \cos t - 3 \sin t$$

驗算： $Y = t + \cos t - 3 \sin t$ ,  $Y' = 1 - \sin t - 3 \cos t$ ,  $Y'' = -\cos t + 3 \sin t$ .  $Y'' + Y = t$ ,  
 $Y(0) = 1$ ,  $Y'(0) = -2$  故所得即為正確答案。

亦可利用褶積積分解之，見第 7 題（令  $a = 1$ ,  $F(t) = t$ ）。

3.2 解  $Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t}$ ,  $Y(0) = -3$ ,  $Y'(0) = 5$ .

圖 取拉氏變換  $\mathcal{L}\{Y''\} - 3\mathcal{L}\{Y'\} + 2\mathcal{L}\{Y\} = 4\mathcal{L}\{e^{2t}\}$

$$\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} - 3\{sy - Y(0)\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$\{s^2y + 3s - 5\} - 3\{sy + 3\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$y = \frac{4}{(s^2 - 3s + 2)(s-2)} + \frac{14-3s}{s^2 - 3s + 2}$$

$$= \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

$$\text{故 } Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}\right\} = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

讀者可自行帶入驗算。

3.3 解  $Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t} \sin t$ ,  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(0) = 1$ .

圖 取拉氏變換  $\mathcal{L}\{Y''\} + 2\mathcal{L}\{Y'\} + 5\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{e^{-t} \sin t\}$

$$\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + 2\{sy - Y(0)\} + 5y = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\{s^2y - s(0) - 1\} + 2\{sy - 0\} + 5y = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$(s^2 + 2s + 5)y - 1 = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$y = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} + \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$= \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

故 [ 見第 2 章, 28 題 ]

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t}(\sin t + \sin 2t)$$

3.4 解  $Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2e^t$ ,  $Y(0) = 1$ ,  $Y'(0) = 0$ ,  $Y''(0) = -2$ .

圖 取拉氏變換  $\mathcal{L}\{Y'''\} - 3\mathcal{L}\{Y''\} + 3\mathcal{L}\{Y'\} - \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{t^2e^t\}$

$$\{s^3y - s^2Y(0) - sY'(0) - Y''(0)\} - 3\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + 3\{sy - Y(0)\} - y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$\text{故} \quad (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)y - s^2 + 3s - 1 = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \\ &= \frac{s^2 - 2s + 1 - s}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \\ &= \frac{(s-1)^2 - (s-1) - 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad Y = e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60}$$

### 3.5 求第 4 題微分方程式的通解。

圖 若起始條件任意給定，即假設  $Y(0) = A$ ,  $Y'(0) = B$ ,  $Y''(0) = C$ ，則利用相同方法可得

$$(s^3y - As^2 - Bs - C) - 3(s^2y - As - B) + 3(sy - A) - y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$\text{即} \quad y = \frac{As^2 + (B - 3A)s + 3A - 3B + C}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

因為  $A$ 、 $B$ 、 $C$  之值為任意給定，故等號右式第一項的分子也是任意給定，所以我們可字成

$$y = \frac{c_1}{(s-1)^3} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{c_3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

取反拉氏變換可得

$$\begin{aligned} y &= \frac{c_1 t^2}{2} e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t + \frac{t^5 e^t}{60} \\ &= c_4 t^2 + c_5 t e^t + c_6 e^t + \frac{t^5 e^t}{60} \end{aligned}$$

其中  $c_k$ 's 為任意給定之常數。

由上可知，求通解要比求特解來得容易，因為我們可免去計算部分分式展開後的常數值。

### 3.6 解 $Y'' + 9Y = \cos 2t$ ，已知 $Y(0) = 1$ , $Y(\pi/2) = -1$ 。

圖 因  $Y'(0)$  未知，令  $Y'(0) = c$ ，則

$$\mathcal{L}\{Y''\} + 9\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}$$

$$s^2y - sY(0) - Y'(0) + 9y = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$(s^2+9)y - s - c = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned}\text{即 } y &= \frac{s+c}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)} \\ &= \frac{s}{s^2+9} + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)} - \frac{s}{5(s^2+9)} \\ &= \frac{4}{5} \left( \frac{s}{s^2+9} \right) + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)}\end{aligned}$$

$$\text{故 } Y = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{c}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$$

欲求  $c$ ，可由  $Y(\pi/2) = -1$ ，故  $-1 = -c/3 - 1/5$ ，即  $c = 12/5$ ，代入得

$$Y = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{4}{5} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$$

3.7 解  $Y'' + a^2 Y = F(t)$ ,  $Y(0) = 1$ ,  $Y'(0) = -2$ .

圖 取拉氏變換  $\mathcal{L}\{Y''\} + a^2 \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$

$$s^2 y - s Y(0) - Y'(0) + a^2 y = f(s)$$

$$s^2 y - s + 2 + a^2 y = f(s)$$

$$\text{即 } y = \frac{s-2}{s^2+a^2} + \frac{f(s)}{s^2+a^2}$$

利用褶積定理，

$$\begin{aligned}Y &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-2}{s^2+a^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s^2+a^2} \right\} \\ &= \cos at - \frac{2 \sin at}{a} + F(t) * \frac{\sin at}{a} \\ &= \cos at - \frac{2 \sin at}{a} + \frac{1}{a} \int_0^t F(u) \sin a(t-u) du\end{aligned}$$

注意在此題中， $F(t)$  的拉氏變換並不包含在最後的答案中。

3.8 求  $Y'' - a^2 Y = F(t)$  的通解。

圖 令  $Y(0) = c_1$ ,  $Y'(0) = c_2$ ，再取拉氏變換，得

$$s^2 y - s c_1 - c_2 - a^2 y = f(s)$$

即

$$y = \frac{s c_1 + c_2}{s^2 - a^2} + \frac{f(s)}{s^2 - a^2}$$

故

$$Y = c_1 \cosh at + \frac{c_2}{a} \sinh at + \frac{1}{a} \int_0^t F(u) \sinh a(t-u) du$$

$$= A \cosh at + B \sinh at + \frac{1}{a} \int_0^t F(u) \sinh a(t-u) du$$

此即為所求的通解。

### 變係數常微分方程式

3.9 解  $tY'' + Y' + 4tY = 0$ ,  $Y(0) = 3$ ,  $Y'(0) = 0$ .

圖 取拉氏變換  $\mathcal{L}\{tY''\} + \mathcal{L}\{Y'\} + \mathcal{L}\{4tY\} = 0$

$$\text{即} \quad -\frac{d}{ds}\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + \{sy - Y(0)\} - 4\frac{dy}{ds} = 0$$

$$\text{化簡得} \quad (s^2 + 4)\frac{dy}{ds} + sy = 0$$

$$\text{故} \quad \frac{dy}{y} + \frac{s ds}{s^2 + 4} = 0$$

$$\text{積分得} \quad \ln y + \frac{1}{2} \ln(s^2 + 4) = c_1 \quad \text{或} \quad y = \frac{c}{\sqrt{s^2 + 4}}$$

$$\text{取反拉氏變換得} \quad Y = cJ_0(2t)$$

欲求  $c$ ，可由  $Y(0) = cJ_0(0) = c = 3$ 。故

$$Y = 3J_0(2t)$$

3.10 解  $tY'' + 2Y' + tY = 0$ ,  $Y(0+) = 1$ ,  $Y(\pi) = 0$ .

圖 令  $Y'(0+) = c$ ，取各項之拉氏變換，得

$$-\frac{d}{ds}\{s^2y - sY(0+) - Y'(0+)\} + 2\{sy - Y(0+)\} - \frac{d}{ds}y = 0$$

$$\text{即} \quad -s^2y' - 2sy + 1 + 2sy - 2 - y' = 0$$

$$\text{化簡得} \quad -(s^2 + 1)y' - 1 = 0 \quad \text{或} \quad y' = \frac{-1}{s^2 + 1}$$

$$\text{積分得} \quad y = -\tan^{-1}s + A$$

當  $s \rightarrow 0$ ， $y \rightarrow 0$ ，故  $A = \pi/2$ ，代入得

$$y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

由第1章定理1-13之後的例子，可知

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = \frac{\sin t}{t}$$

且  $Y$  滿足  $Y(\pi) = 0$ ，故為所求之答案。

3.11 解  $Y'' - tY' + Y = 1$ ,  $Y(0) = 1$ ,  $Y'(0) = 2$ .

圖 取拉氏變換  $\mathcal{L}\{Y''\} - \mathcal{L}\{tY'\} + \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

$$\text{即} \quad s^2 y - sY(0) - Y'(0) + \frac{d}{ds}\{sy - Y(0)\} + y = \frac{1}{s}$$

$$\text{化簡得} \quad s^2 y - s - 2 + sy' + y + y = \frac{1}{s}$$

$$\text{故} \quad sy' + (s^2 + 2)y = s + 2 + \frac{1}{s}$$

$$\text{即} \quad \frac{dy}{ds} + \left(s + \frac{2}{s}\right)y = 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$$

存在一積分因式為  $e^{\int (s + \frac{2}{s}) ds} = e^{\frac{1}{2}s^2 + 2 \ln s} = s^2 e^{\frac{1}{2}s^2}$ .

$$\text{故} \quad \frac{d}{ds}\{s^2 e^{\frac{1}{2}s^2} y\} = \left(1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) s^2 e^{\frac{1}{2}s^2}$$

$$\begin{aligned} \text{積分得} \quad y &= \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{2}s^2} \int \left(1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) s^2 e^{\frac{1}{2}s^2} ds \\ &= \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{2}s^2} \int (s^2 + 2s + 1) e^{\frac{1}{2}s^2} ds \\ &= \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{2}s^2} [s e^{\frac{1}{2}s^2} + 2e^{\frac{1}{2}s^2} + c] \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{-\frac{1}{2}s^2} \end{aligned}$$

欲求  $c$ ，可由級數展開如下：

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} \left(1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4 - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{c+2}{s^2} - c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}s^2 + \cdots\right) \end{aligned}$$

因  $\mathcal{L}^{-1}\{s^k\} = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ，故取反拉氏變換

$$Y = 1 + (c+2)t$$

但  $Y'(0) = 2$ ，故  $c = 0$  因此可得答案如下：

$$Y = 1 + 2t$$

聯立常微分方程式

$$3.12 \quad \text{解} \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = 2X - 3Y \\ \frac{dY}{dt} = Y - 2X \end{cases} \quad \text{已知} \quad X(0) = 8, Y(0) = 3.$$

圖 取拉氏變換，並令  $\mathcal{L}\{X\} = x$ ,  $\mathcal{L}\{Y\} = y$ .

$$sx - 8 = 2x - 3y \quad \text{即} \quad (1) \quad (s-2)x + 3y = 8$$

$$sy - 3 = y - 2x \quad \text{即} \quad (2) \quad 2x + (s-1)y = 3$$

解(1)及(2)，得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ s-2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad X &= \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ Y &= \mathcal{L}^{-1}\{y\} = 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{aligned}$$

$$3.13 \quad \text{解} \quad \begin{cases} X'' + Y' + 3X = 15e^{-t} \\ Y'' - 4X' + 3Y = 15 \sin 2t \end{cases} \quad \text{已知} \quad X(0) = 35, X'(0) = -48, Y(0) = 27, \\ Y'(0) = -55.$$

圖 取拉氏變換，得

$$s^2x - s(35) - (-48) + sy - 27 + 3x = \frac{15}{s+1}$$

$$s^2y - s(27) - (-55) - 4\{sx - 35\} + 3y = \frac{30}{s^2+4}$$

$$\text{即} \quad (s^2+3)x + sy = 35s - 21 + \frac{15}{s+1} \quad (1)$$

$$-4sx + (s^2+3)y = 27s - 195 + \frac{30}{s^2+4} \quad (2)$$

解(1)及(2)，得



$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} 35s - 21 + \frac{15}{s+1} & s \\ 27s - 195 + \frac{30}{s^2+4} & s^2+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{35s^3 - 48s^2 + 300s - 63}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{15(s^2+3)}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} - \frac{30s}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} \\
 &= \frac{30s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} s^2+3 & 35s - 21 + \frac{15}{s+1} \\ -4s & 27s - 195 + \frac{30}{s^2+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{27s^3 - 55s^2 - 3s - 585}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{60s}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{30(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} \\
 &= \frac{30s}{s^2+9} - \frac{60}{s^2+1} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 X &= \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 30 \cos t - 15 \sin 3t + 3e^{-t} + 2 \cos 2t \\
 Y &= \mathcal{L}^{-1}\{y\} = 30 \cos 3t - 60 \sin t - 3e^{-t} + \sin 2t
 \end{aligned}$$

### 在力學方面的應用

3.14 一個質量為 2 公克的質點  $P$  在  $X$  軸上移動，它受到一個朝向原點的力，其大小為  $8X$ 。若  $P$  原先靜止於  $X = 10$ ，求出其後任意時刻  $P$  的位置為何？但假設(a)無其他外力，(b)存在一阻滯力，其大小為  $P$  之瞬時速度的 8 倍。

圖 (a) 取向右為正（見圖 3-5）

。當  $X > 0$ ，淨力向左（即為負），故為  $-8X$ 。

當  $X < 0$ ，淨力向右（即為正），故亦為  $-8X$ 。

在以上兩種情況中，淨力均為  $-8X$ ，故由牛頓定律

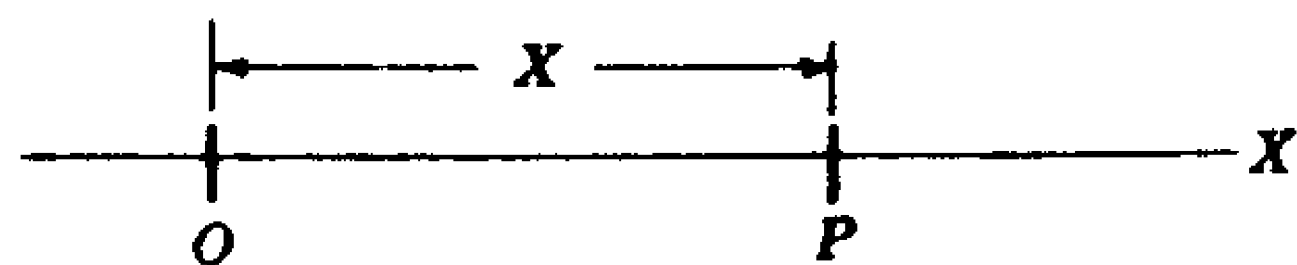


圖 3-5

$$(\text{質量}) \cdot (\text{加速度}) = \text{淨力}$$

$$2 \cdot \frac{d^2X}{dt^2} = -8X$$

即 
$$\frac{d^2X}{dt^2} + 4X = 0 \quad (1)$$

起始條件爲：(2)  $X(0) = 10$ , (3)  $X'(0) = 0$ .

取(1)式之拉氏變換，並代入(2)及(3)，可得（令  $x = \mathcal{L}\{X\}$ ），

$$s^2x - 10s + 4x = 0 \quad \text{或} \quad x = \frac{10s}{s^2 + 4}$$

故 
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10 \cos 2t$$

此運動之圖形如圖 3-6 所示，其振幅（Amplitude，自 0 點算起之最大位移）爲 10，週期（Period，一循環所需時間）爲  $\pi$ ，頻率（Frequency，每秒內的循環數）爲  $1/\pi$ 。

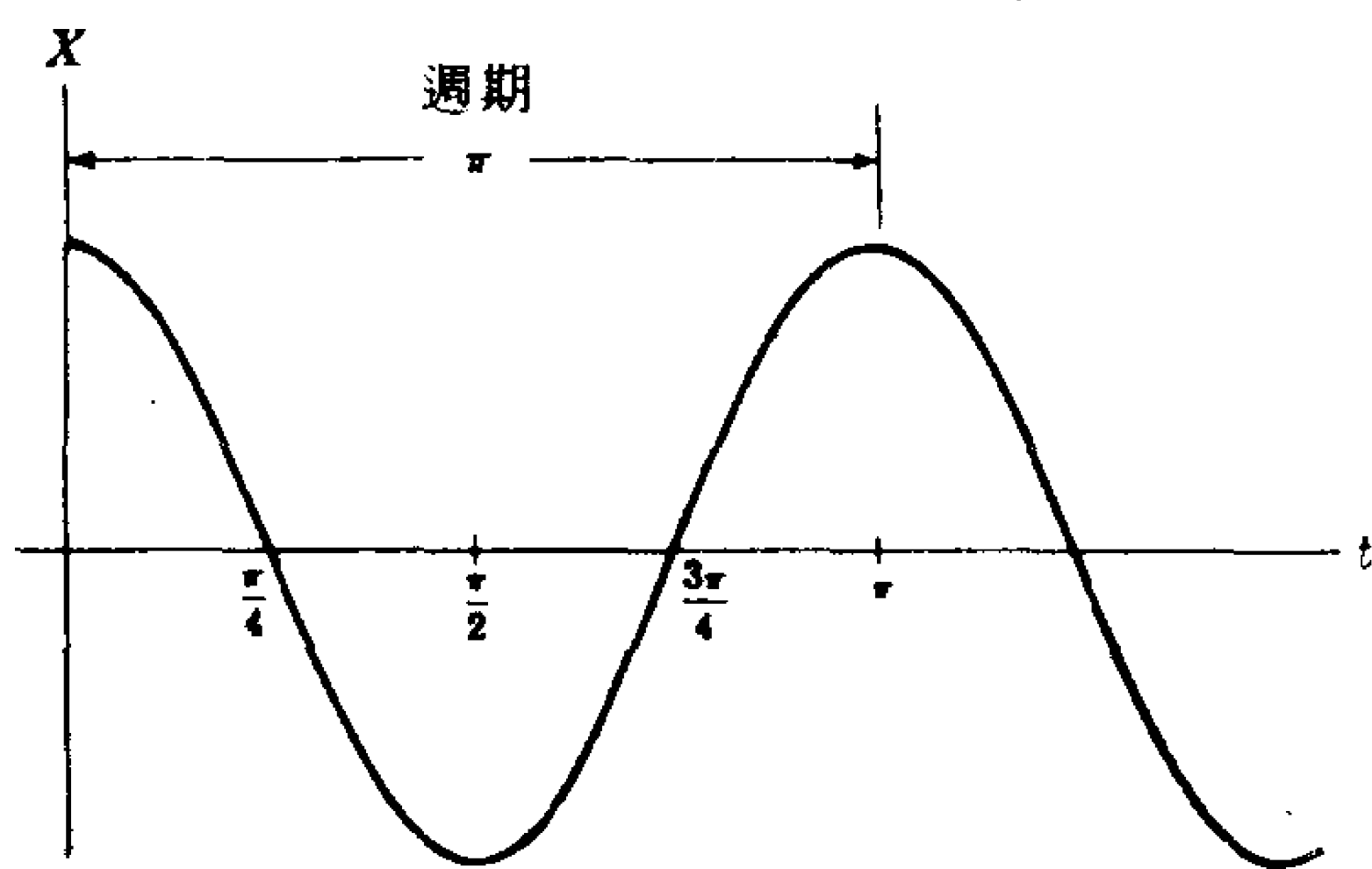


圖 3-6

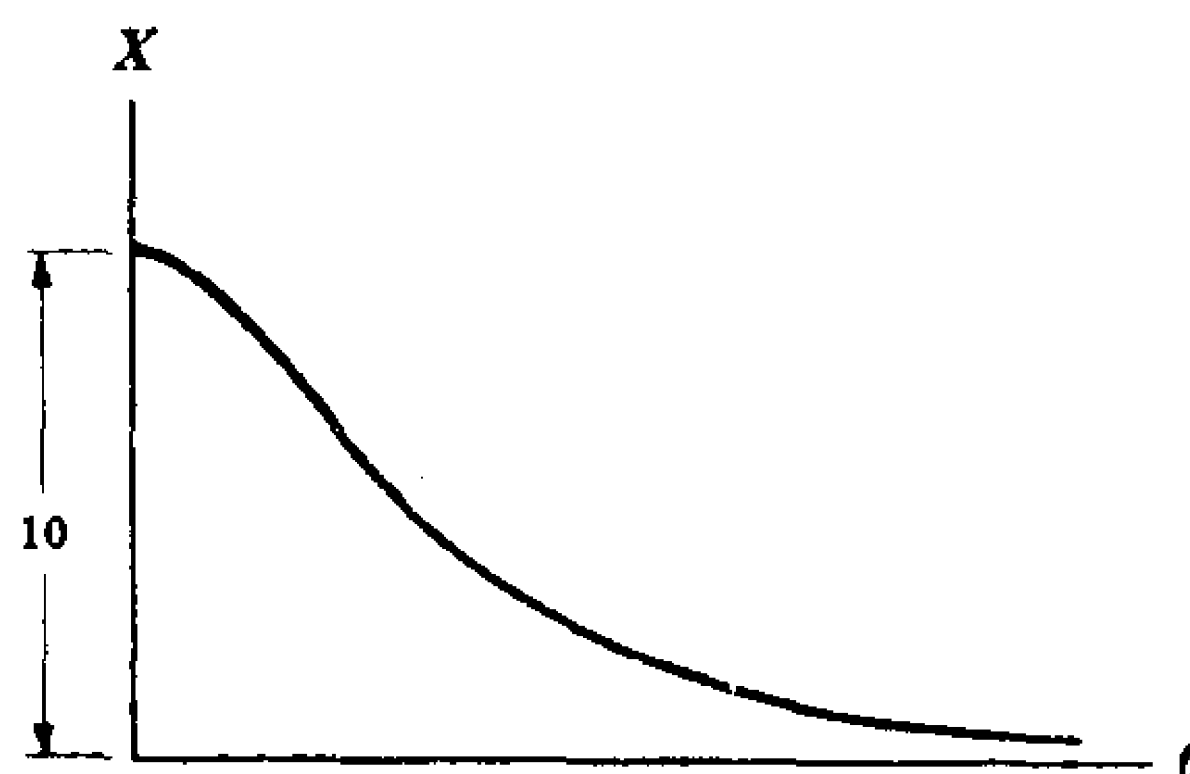


圖 3-7

- (b) 當  $X > 0$  且  $dX/dt > 0$  時， $P$  在  $O$  的右方，且向右移動，故阻滯力向左（爲負），其值爲  $-8 dX/dt$ 。同理，當  $X < 0$  且  $dX/dt < 0$  時， $P$  在左方，且向左移動，故阻滯力向右（爲正），其值爲  $-8 dX/dt$ 。當  $X > 0$ ， $dX/dt < 0$  或  $X < 0$ ， $dX/dt > 0$  時，阻滯力均爲  $-8 dX/dt$ ，由

$$(\text{質量}) \cdot (\text{加速度}) = \text{淨力}$$

得 
$$2 \frac{d^2X}{dt^2} = -8X - 8 \frac{dX}{dt}$$

即 
$$\frac{d^2X}{dt^2} + 4 \frac{dX}{dt} + 4X = 0 \quad (4)$$

而起始條件爲 (5)  $X(0) = 10$ , (6)  $X'(0) = 0$ .

取(4)式之拉氏變換，並代入(5)及(6)，可得

$$s^2x - 10s + 4(sx - 10) + 4x = 0$$

即 
$$x = \frac{10s + 40}{s^2 + 4s + 4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } X &= \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+40}{(s+2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10(s+2)+20}{(s+2)^2}\right\} \\
 &= 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 20\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} \\
 &= 10e^{-2t} + 20te^{-2t} = 10e^{-2t}(1+2t)
 \end{aligned}$$

$X$  對  $t$  的圖形如圖 3-7 所示。注意此運動為不振盪 (Non-oscillatory) 質點  $P$  會接近  $O$ ，但卻永遠無法到達。

- 3.15 一質量為  $m$  的質點在  $X$  軸上移動，且受到一向原點  $O$  的吸引力  $kx$ ， $k > 0$ 。質點亦受到一阻滯力  $\beta dX/dt$ ， $\beta > 0$ 。在各種情形下，討論質點如何運動（但已知  $X(0) = X_0$ ， $X'(0) = V_0$ ）。

圖 運動方程式為

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -kX - \beta \frac{dX}{dt}$$

$$\text{即 } \frac{d^2 X}{dt^2} + 2\alpha \frac{dX}{dt} + \omega^2 X = 0 \quad (1)$$

其中  $\alpha = \beta/2m$ ， $\omega^2 = k/m$ 。

取(1)式之拉氏變換，並代入起始條件，可得

$$s^2 x - X_0 s - V_0 + 2\alpha(sx - X_0) + \omega^2 x = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{即 } x &= \frac{sX_0 + (V_0 + 2\alpha X_0)}{s^2 + 2\alpha s + \omega^2} \\
 &= \frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}
 \end{aligned}$$

情況 1， $\omega^2 - \alpha^2 > 0$ 。

在此情況下，

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = X_0 e^{-\alpha t} \cos \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t + \frac{(V_0 + \alpha X_0)}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \sin \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t$$

此運動稱為阻滯振盪 (Damped Oscillatory) (見圖 3-8)。質點以  $O$  為中心來振盪，而且振幅漸次減小。振盪週期為  $2\pi / \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ ，頻率為  $\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} / 2\pi$ 。 $\omega / 2\pi$  (對應於  $\alpha = 0$ ，即無阻滯) 稱為自然頻率 (Natural frequency)。

情況 2， $\omega^2 - \alpha^2 = 0$

在此情況下，

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X_0}{s+\alpha} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2}\right\}$$

108/204-0 184

$$= X_0 e^{-\alpha t} + (V_0 + \alpha X_0) t e^{-\alpha t}$$

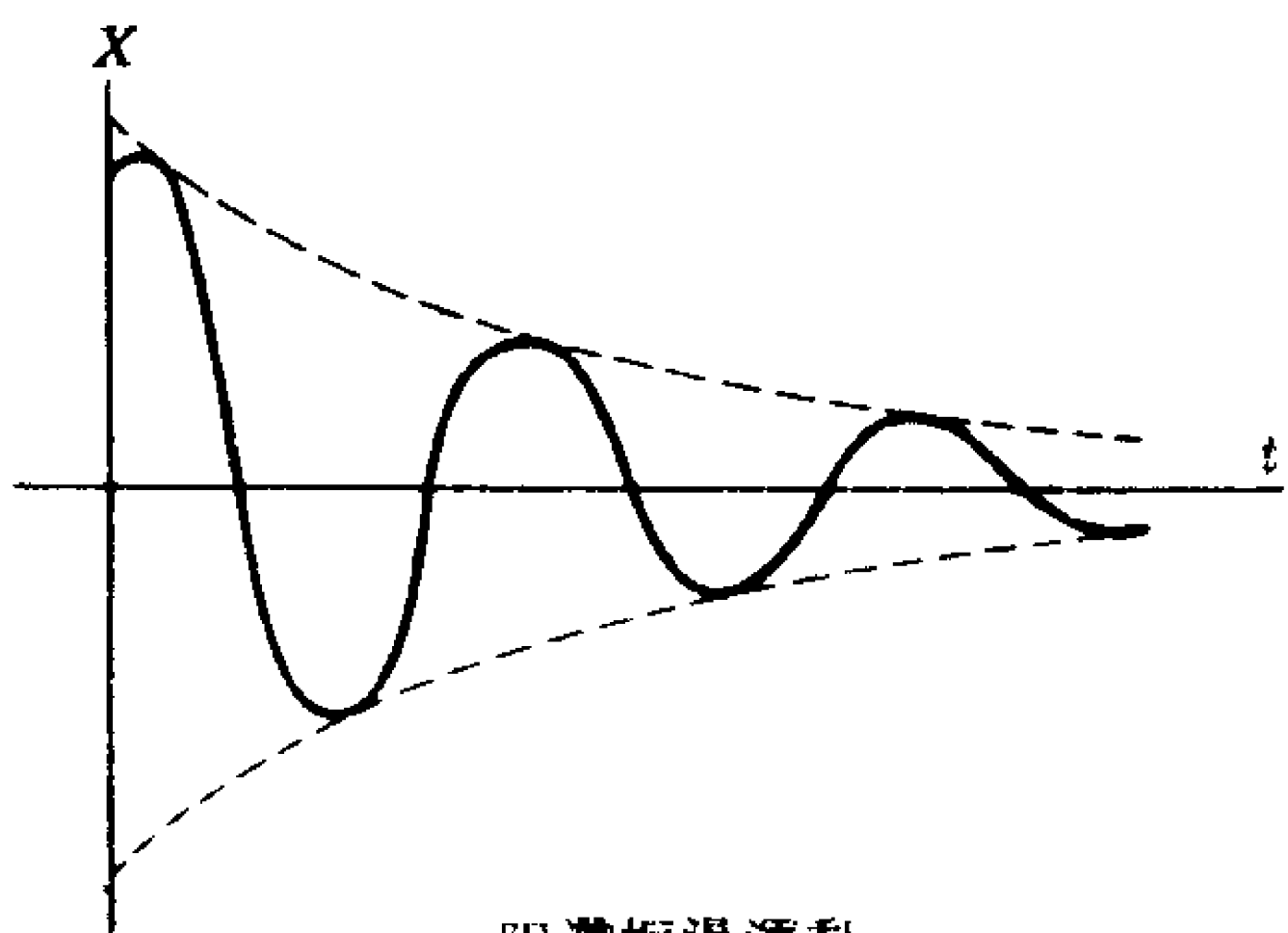
在此質點並不對O點振盪，它接近O點，但却永遠無法到達。此運動稱為**臨界阻滯運動**(Critically damped motion)，因為若阻滯常數 $\beta$ 再減小一點，就會產生振盪(見圖3-9)。

情況3， $\omega^2 - \alpha^2 < 0$

在此情況下，

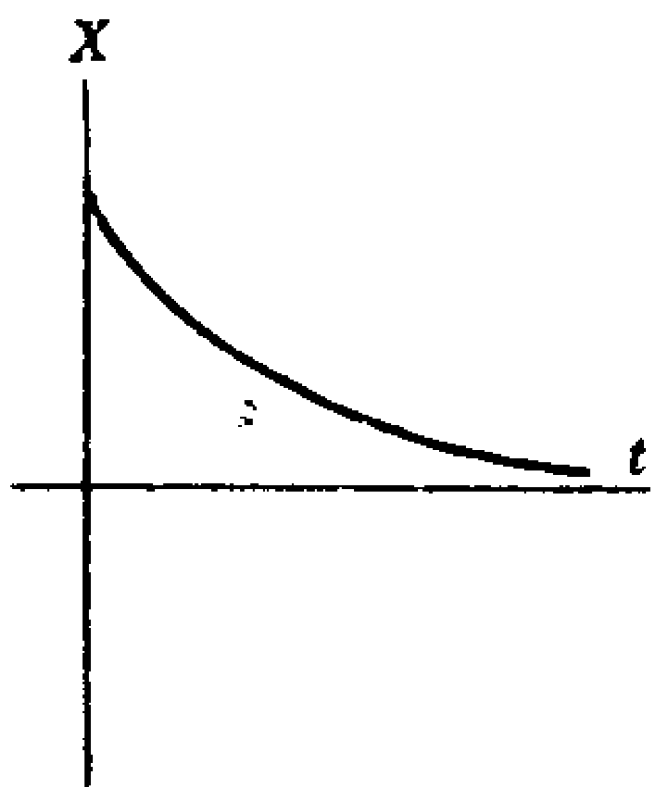
$$\begin{aligned} X &= \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)}\right\} \\ &= X_0 \cosh \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t + \frac{V_0 + \alpha X_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \sinh \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t \end{aligned}$$

此運動稱為**過阻滯運動**(overdamped motion)，是不會振盪的。其圖形和臨界阻滯運動很相似(見圖3-10)。



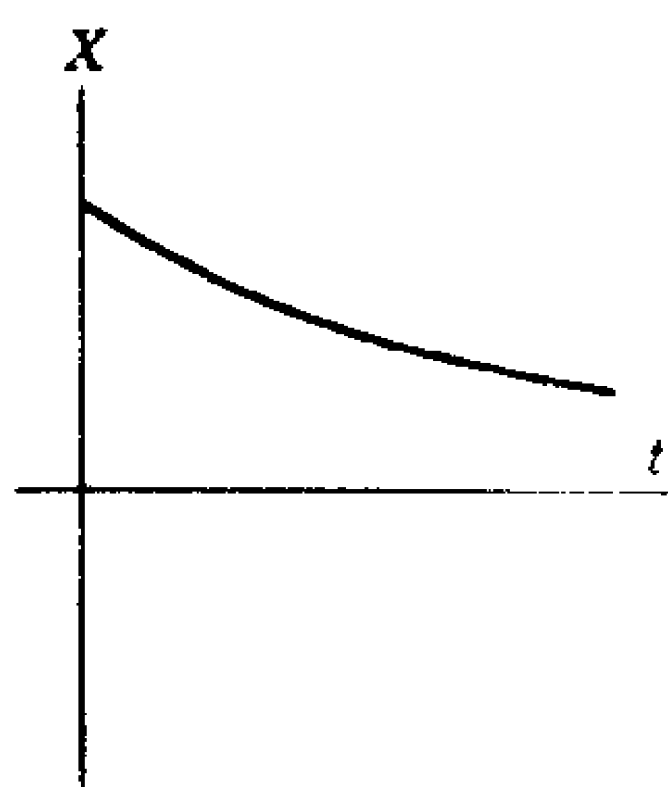
阻滯振盪運動

圖 3-8



臨界阻滯運動

圖 3-9



過阻滯運動

圖 3-10

### 在電路方面的應用

- 3.16 有一電感大小為2亨利，一電阻為16歐姆，及一電容為0.02法拉，將以上三元件串聯，並加上一電動勢 $E$ 伏特。在 $t=0$ 時，電容中的電荷及電路中的電流均為零。若(a)  $E=300$ (伏特)，(b)  $E=100 \sin 3t$ (伏特)，求出在任意時間 $t>0$ 時，電荷及電流大小為何。

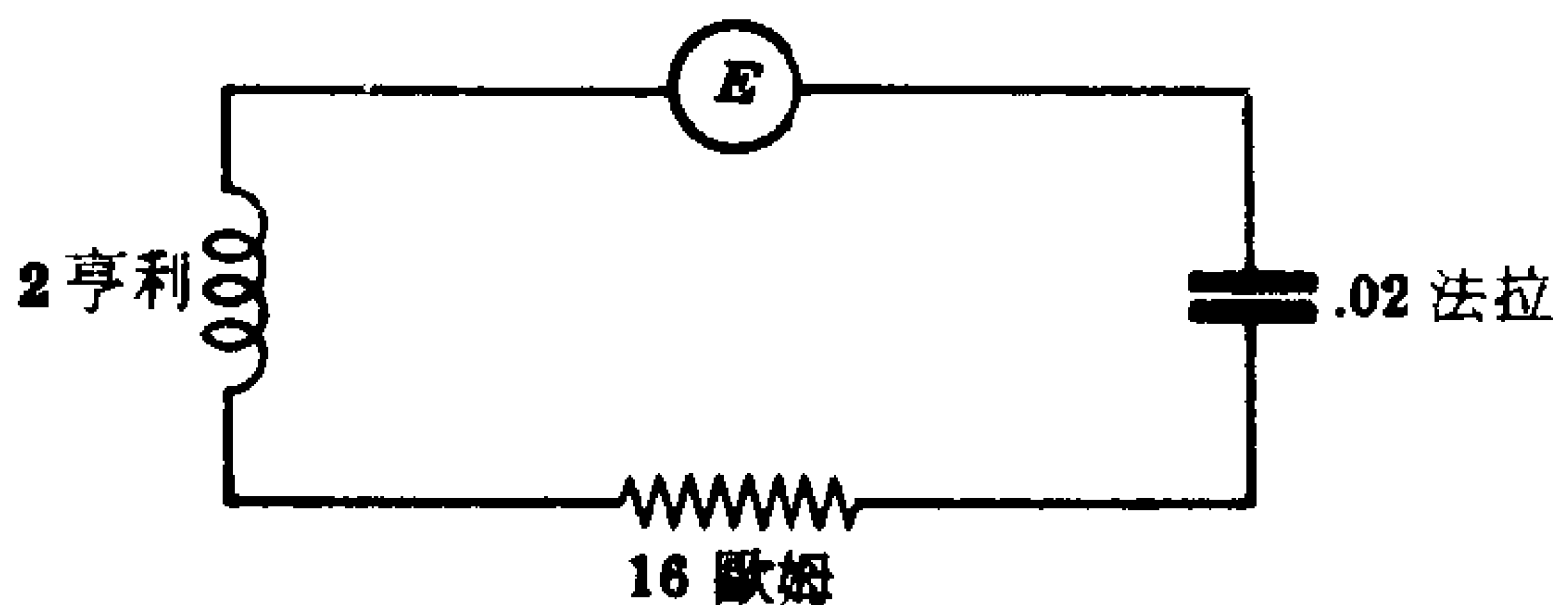


圖 3-11

圖 令  $Q$  及  $I$  代表在時間  $t$  時，瞬時的電荷及電流。由克希荷夫定律可得

$$2 \frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{.02} = E$$

但  $I = dQ/dt$ ，故

$$2 \frac{d^2Q}{dt^2} + 16 \frac{dQ}{dt} + 50Q = E$$

起始條件為  $Q(0) = 0$ ,  $I(0) = Q'(0) = 0$ .

(a) 若  $E = 300$ ，則(2)變為

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8 \frac{dQ}{dt} + 25Q = 150$$

取拉氏變換得

$$\{s^2q - sQ(0) - Q'(0)\} + 8(sq - Q(0)) + 25q = \frac{150}{s}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } q &= \frac{150}{s(s^2 + 8s + 25)} = \frac{6}{s} - \frac{6s + 48}{s^2 + 8s + 25} \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6(s + 4) + 24}{(s + 4)^2 + 9} \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6(s + 4)}{(s + 4)^2 + 9} - \frac{24}{(s + 4)^2 + 9} \end{aligned}$$

$$\text{故 } Q = 6 - 6e^{-4t} \cos 3t - 8e^{-4t} \sin 3t$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = 50e^{-4t} \sin 3t$$

(b) 若  $E = 100 \sin 3t$ ，則(2)變為

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8 \frac{dQ}{dt} + 25Q = 50 \sin 3t$$

取拉氏變換，得

$$(s^2 + 8s + 25)q = \frac{150}{s^2 + 9}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } q &= \frac{150}{(s^2 + 9)(s^2 + 8s + 25)} \\ &= \frac{75}{26} \frac{1}{s^2 + 9} - \frac{75}{52} \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{75}{26} \frac{1}{(s + 4)^2 + 9} + \frac{75}{52} \frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } Q &= \frac{25}{26} \sin 3t - \frac{75}{52} \sin 3t + \frac{25}{26} e^{-4t} \sin 3t + \frac{75}{52} e^{-4t} \cos 3t \\ &= \frac{25}{52} (2 \sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{25}{52} e^{-4t} (3 \cos 3t + 2 \sin 3t) \end{aligned}$$

$$\text{且 } I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}(2 \cos 3t + 3 \sin 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17 \sin 3t + 6 \cos 3t)$$

當  $t$  很大時， $Q$  及  $I$  中包含  $e^{-4t}$  的項均趨近於零，這些包含  $e^{-4t}$  的項稱為此解答中的暫態項 (Transient terms) 或暫態部分 (Transient part)。其他項稱為此解答之穩態項 (Steady-state terms) 或穩態部分 (Steady state part)。

3.17 已知圖 3-12 的電路在  $t = 0$  時電流均為零，試求在  $t > 0$  時，各分枝的電流。

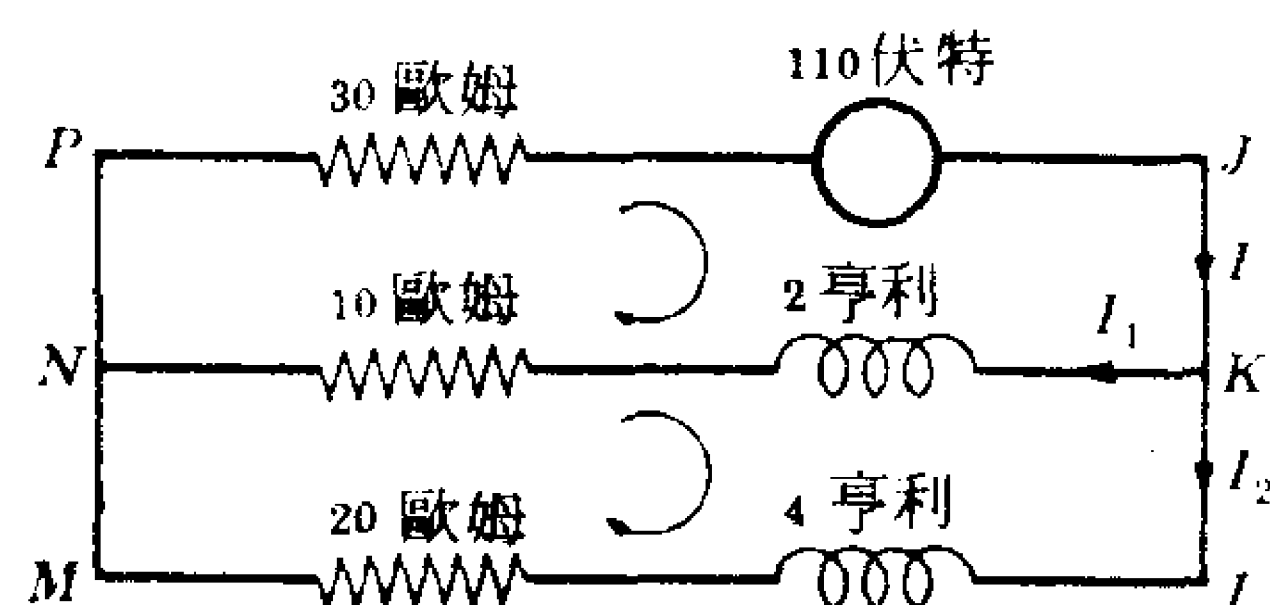


圖 3-12

解 克希荷夫第二定律指出，沿著一閉迴路的電位降或壓降之代數和為零，現在我們順時鐘沿著迴路  $KL$   $MNK$  及  $JKNPJ$  繞一圈。

當我們在繞這些迴路時，若行進的方向和電流相反，則壓降就是正的，而壓升則為壓降的相反數。

令  $I$  為  $NPJK$  中的電流，此電流在接點  $K$  分為  $I_1$ ， $I_2$ ，故  $I = I_1 + I_2$ ，此相當於克希荷夫第一定律。

應用克希荷夫第二定律於迴路  $KLMNK$  及  $JKNPJ$ ，可得

$$\left. \begin{aligned} -10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} + 4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 &= 0 \\ 30I - 110 + 2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

或

$$\left. \begin{aligned} -5I_1 - \frac{dI_1}{dt} + 2\frac{dI_2}{dt} + 10I_2 &= 0 \\ \frac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 &= 55 \end{aligned} \right\}$$

起始條件為  $I_1(0) = I_2(0) = 0$ 。

取拉氏變換，並代入起始條件，得

$$\begin{aligned} -5i_1 - \{si_1 - I_1(0)\} + 2\{si_2 - I_2(0)\} + 10i_2 &= 0 \\ \{si_1 - I_1(0)\} + 20i_1 + 15i_2 &= 55/s \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} (s+5)i_1 - (2s+10)i_2 &= 0 \\ (s+20)i_1 + 15i_2 &= 55/s \end{aligned}$$

由第一式，得  $i_1 = 2i_2$ ，代入第二式得

$$(2s + 55)i_2 = \frac{55}{s} \quad \text{故} \quad i_2 = \frac{55}{s(2s + 55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s + 55}$$

$$\text{故} \quad I_2 = 1 - e^{-55t/2}$$

$$I_1 = 2I_2 = 2 - 2e^{-55t/2}$$

$$I = I_1 + I_2 = 3 - 3e^{-55t/2}$$

### 橫樑方面的應用

3.18 假設有一橫樑，在端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為鉸支承，且每單位長載有均勻負重  $W_0$ ，求任一點的撓度。

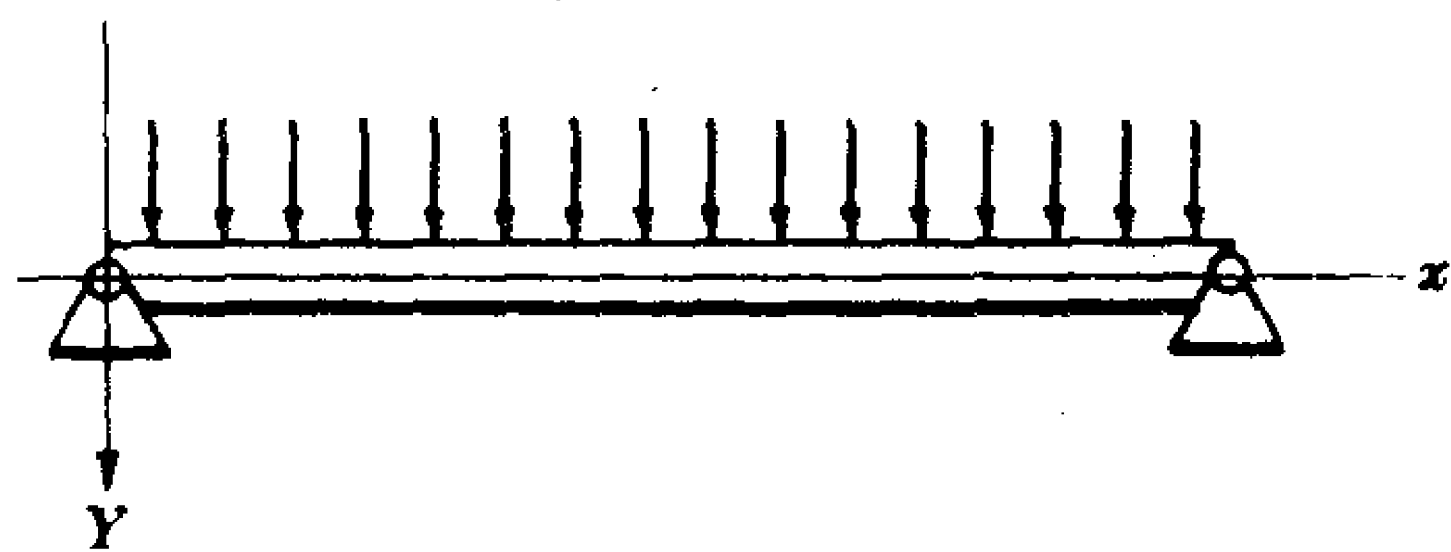


圖 3-13

答 微分方程式及邊界條件為

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{W_0}{EI} \quad 0 < x < l \quad (1)$$

$$Y(0) = 0, Y''(0) = 0, Y(l) = 0, Y''(l) = 0 \quad (2)$$

取(1)式的拉氏變換，並令  $y = y(s) = \mathcal{L}\{Y(x)\}$ ，則

$$s^4 y - s^3 Y(0) - s^2 Y'(0) - s Y''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EI s^4} \quad (3)$$

利用(2)式的前 2 個條件，並令  $Y'(0) = c_1$ ， $Y'''(0) = c_2$ ，可得

$$y = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EI s^5}$$

取反拉氏變換，得

$$Y(x) = c_1 x + \frac{c_2 x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI} \frac{x^4}{4!} = c_1 x + \frac{c_2 x^3}{6} + \frac{W_0 x^4}{24EI}$$

由(2)式的最後兩個條件，得

$$c_1 = \frac{W_0 l^3}{24EI}, \quad c_2 = -\frac{W_0 l}{2EI}$$

故所求之撓度為

$$Y(x) = \frac{W_0}{24EI} (3x - 2lx^3 + x^4) = \frac{W_0}{24EI} x(l-x)(l^2 + lx - x^2)$$

### 3.19 一懸臂樑 (Cantilever beam)

(圖 3-14) 在端點  $x = 0$  爲固定支承，而在另一端點  $x = l$  爲自由端。每單位長度的負載爲

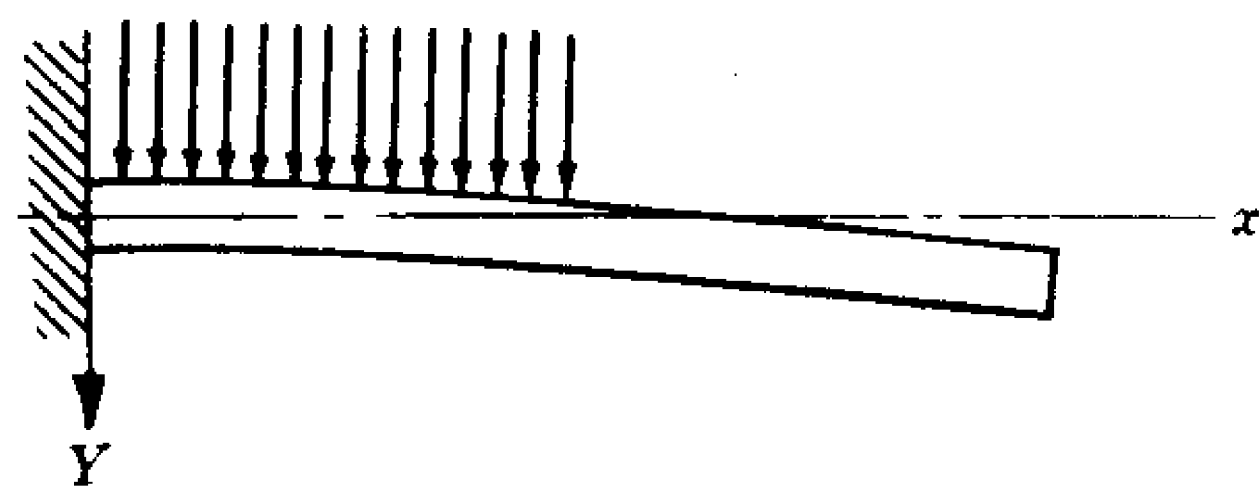


圖 3-14

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & 0 < x < l/2 \\ 0 & l/2 < x < l \end{cases}$$

圖 微分方程式及邊界條件如下：

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \quad 0 < x < l \quad (1)$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y''(l) = 0, \quad Y'''(l) = 0 \quad (2)$$

爲了便於應用拉氏變換，我們將  $W(x)$  之定義延伸如下：

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & 0 < x < l/2 \\ 0 & x > l/2 \end{cases} \quad (3)$$

可利用黑佛塞單位函數寫成

$$W(x) = W_0 \{u(x) - u(x - l/2)\} \quad (4)$$

取(1)式的拉氏變換，並令  $y = y(s) = \mathcal{L}\{Y(x)\}$  代入，得

$$s^4 y - s^3 Y(0) - s^2 Y'(0) - s Y''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EI} \left\{ \frac{1 - e^{-sl/2}}{s} \right\}$$

由(2)式的前兩個條件，並令  $Y''(0) = c_1$ ,  $Y'''(0) = c_2$ ，可得

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EI s^5} \{1 - e^{-sl/2}\}$$

取反拉氏變換，得

$$Y(x) = \frac{c_1 x^2}{2!} + \frac{c_2 x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI} \frac{x^4}{4!} - \frac{W_0}{EI} \frac{(x - l/2)^4}{4!} u(x - l/2)$$

此式相當於



$$Y(x) = \begin{cases} \frac{c_1 x^2}{2!} + \frac{1}{6} c_2 x^3 + \frac{W_0}{24EI} x^4 & 0 < x < l/2 \\ \frac{c_1 x^2}{2!} + \frac{1}{6} c_2 x^3 + \frac{W_0}{24EI} x^4 - \frac{W_0}{24EI} (x - l/2)^4 & x > l/2 \end{cases}$$

利用  $Y''(l) = 0$ ,  $Y'''(l) = 0$  代入, 得

$$c_1 = \frac{W_0 l^2}{8EI}, \quad c_2 = -\frac{W_0 l}{2EI}$$

故所求之撓度為

$$Y(x) = \frac{W_0 l^2}{16EI} x^2 - \frac{W_0 l}{12EI} x^3 + \frac{W_0}{24EI} x^4 - \frac{W_0}{24EI} (x - l/2)^4 u(x - l/2)$$

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{W_0 l^2}{16EI} x^2 - \frac{W_0 l}{12EI} x^3 + \frac{W_0}{24EI} x^4 & 0 < x < l/2 \\ \frac{W_0 l^2}{16EI} x^2 - \frac{W_0 l}{12EI} x^3 + \frac{W_0}{24EI} x^4 - \frac{W_0}{24EI} (x - l/2)^4 & l/2 < x < l \end{cases}$$

3.20 一懸樑其上有集中負載 (Concentrated load)  $P_0$ , 作用在  $x = a$  處。試證明我們可將此負載表為  $W(x) = P_0 \delta(x - a)$ , 其中  $\delta$  為脈衝函數。

圖 考慮一均勻負載分布自

$x = a$  至  $x = a + \epsilon$ ,

其大小為每單位長度  $W_0$

, 則總重量為

$$W_0 [a + \epsilon - a] = W_0 \epsilon$$

但因總重量為  $P_0$ , 故

$$W(x) = \begin{cases} P_0/\epsilon & a < x < a + \epsilon \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

當  $\epsilon \rightarrow 0$  時, 上式即可寫成

$$W(x) = P_0 \delta(x - a)$$

故得證。

3.21 一懸樑其端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為固定支承 (見圖 3-16), 一集中負載  $P_0$  垂直作用於  $x = l/3$  處, 求其撓度。

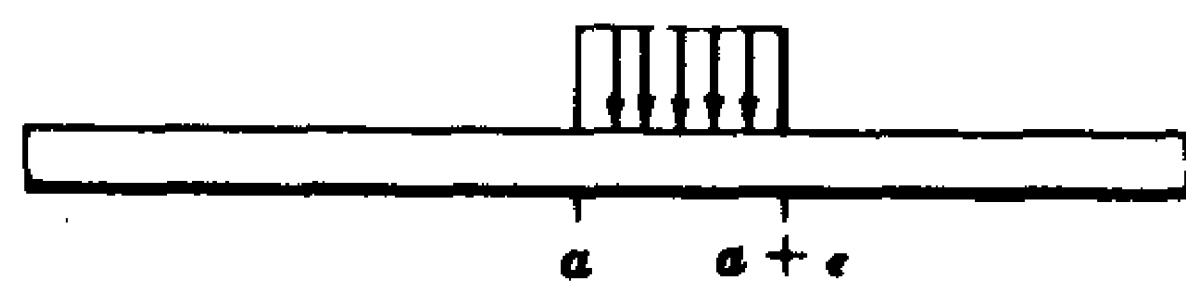


圖 3-15

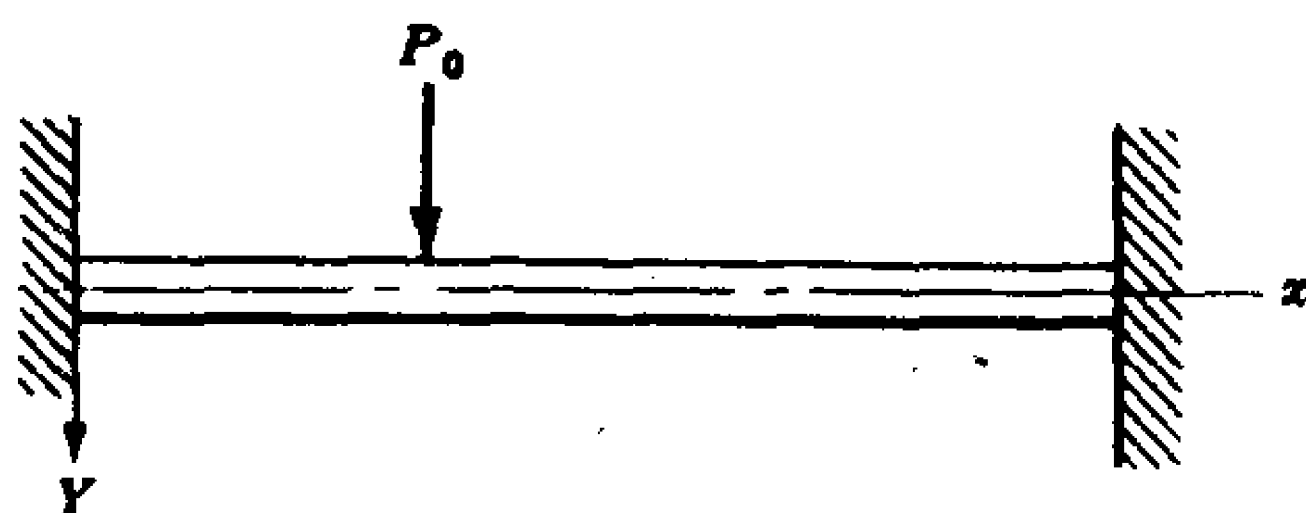


圖 3-16

圖 由 20 題可知，作用於  $x = l/3$  的集中負載可表為  $P_0 \delta(x - l/3)$ ，其中  $\delta$  為脈衝函數，則有關撓度的微分方程式及相關的起始條件為

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{P_0}{EI} \delta(x - l/3) \quad (1)$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y(l) = 0, \quad Y'(l) = 0 \quad (2)$$

取拉氏變換，並令  $y = \mathcal{L}\{Y(x)\}$  代入，得

$$s^4 y - s^3 Y(0) - s^2 Y'(0) - s Y''(0) - Y'''(0) = \frac{P_0}{EI} e^{-ls/3} \quad (3)$$

利用(2)之前兩個條件，並令  $Y''(0) = c_1$ ， $Y'''(0) = c_2$  代入，得

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{P_0}{EI} \frac{e^{-ls/3}}{s^4} \quad (4)$$

取反拉氏變換，得

$$Y(x) = \frac{c_1 x^2}{2!} + \frac{c_2 x^3}{3!} + \frac{P_0}{EI} \frac{(x - l/3)^3}{3!} u(x - l/3) \quad (5)$$

亦即，

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{6} c_2 x^3 & 0 < x < l/3 \\ \frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{6} c_2 x^3 + \frac{P_0}{6EI} (x - l/3)^3 & l/3 < x < l \end{cases}$$

再以(2)之後兩個條件代入，得

$$c_1 = \frac{4P_0 l}{27EI}, \quad c_2 = \frac{-20P_0}{27EI}$$

故所求之撓度為

$$Y(x) = \frac{2P_0 l x^2}{27EI} - \frac{10P_0 x^3}{81EI} + \frac{P_0}{6EI} (x - l/3)^3 u(x - l/3)$$

$$\text{即 } Y(x) = \begin{cases} \frac{2P_0 x^2(3l - 5x)}{81EI} & 0 < x < l/3 \\ \frac{2P_0 x^2(3l - 5x)}{81EI} + \frac{P_0}{6EI} (x - l/3)^3 & l/3 < x < l \end{cases}$$

### 偏微分方程式

3.22 給定  $U(x, t)$  定義於  $a \leq x \leq b$ ， $t > 0$ ，求

$$(a) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial U}{\partial t} dt, \quad (b) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial U}{\partial x} dt$$

但假設某些適當的限制已加諸於  $U = U(x, t)$ 。

圖 (a) 由部分積分，得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial U}{\partial t} dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st} \frac{\partial U}{\partial t} dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ e^{-st} U(x, t) \Big|_0^P + s \int_0^P e^{-st} U(x, t) dt \right\} \\ &= s \int_0^\infty e^{-st} U(x, t) dt - U(x, 0) \\ &= s u(x, s) - U(x, 0) = s u - U(x, 0) \end{aligned}$$

其中  $u = u(x, s) = \mathcal{L}\{U(x, t)\}$ 。

我們已假設  $U(x, t)$  滿足定理 1-1 (對變數  $t$  而言)。

(b) 利用萊普尼茨規則 (在積分符號內微分)，可得

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial U}{\partial x} dt = \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-st} U dt = \frac{du}{dx}$$

### 3.23 根據 22 題，證明

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} &= s^2 u(x, s) - s U(x, 0) - U_t(x, 0) \\ (b) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} &= \frac{d^2 u}{dx^2} \end{aligned}$$

其中  $U_t(x, 0) = \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0}$  且  $u = u(x, s) = \mathcal{L}\{U(x, t)\}$ 。

圖 令  $V = \partial U / \partial t$ ，利用 22 題(a)，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\right\} = s \mathcal{L}\{V\} - V(x, 0) \\ &= s [s \mathcal{L}\{U\} - U(x, 0)] - U_t(x, 0) \\ &= s^2 u - s U(x, 0) - U_t(x, 0) \end{aligned}$$

注意此題以及 22 題(a)的結果，和第 1 章定理 1-6 及 1-9 有某種相似性。讀者可試行推廣之。

### 3.24 解下列偏微分方程式

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2 \frac{\partial U}{\partial t} + U, \quad U(x, 0) = 6e^{-3x}$$

其中  $x > 0$ ,  $t > 0$ 。

圖 對  $t$  取上述微分方程式的拉氏變換，並利用 22 題，得

$$\frac{du}{dx} = 2\{su - U(x, 0)\} + u$$

帶入邊界條件，得

$$\frac{du}{dx} - (2s+1)u = -12e^{-3x} \quad (1)$$

注意到拉氏變換已將原先的偏微分方程式，轉化成爲常微分方程式。

欲解(1)式，兩邊各乘上一積分因式， $e^{\int -(2s+1)dx} = e^{-(2s+1)x}$ ，故(1)式可改寫

成

$$\frac{d}{dx}\{u e^{-(2s+1)x}\} = -12 e^{-(2s+4)x}$$

積分得

$$u e^{-(2s+1)x} = \frac{6}{s+2} e^{-(2s+4)x} + c \quad \text{即} \quad u = \frac{6}{s+2} e^{-3x} + c e^{(2s+1)x}$$

當  $x \rightarrow \infty$  時， $U(x, t)$  必有界，故  $u(x, s)$  亦爲有界，由此可知  $c = 0$ ，故

$$u = \frac{6}{s+2} e^{-3x}$$

取反拉氏變換，得

$$U(x, t) = 6 e^{-2t-3x}$$

此即爲所求（可輕易驗算得知）。

3.25 解  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $U(x, 0) = 3 \sin 2\pi x$ ,  $U(0, t) = 0$ ,  $U(1, t) = 0$  其中  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ 。

圖 取上述微分方程式的拉氏變換，並利用 22, 23 題，得

$$su - U(x, 0) = \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{或} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - su = -3 \sin 2\pi x \quad (1)$$

其中  $u = u(x, s) = \mathcal{L}\{U(x, t)\}$ . (1)式的通解爲

$$u = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x \quad (2)$$

取邊界條件 (和  $t$  有關的) 的拉氏變換, 得

$$\mathcal{L}\{U(0, t)\} = u(0, s) = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{L}\{U(1, t)\} = u(1, s) = 0 \quad (3)$$

利用(3)式的第一個條件 [ $u(0, s) = 0$ ] 代入(2)中, 可得

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (4)$$

利用(3)式的第二個條件 [ $u(1, s) = 0$ ] 代入(2)中, 可得

$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \quad (5)$$

由(4)及(5), 可知  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$  故(2)式變爲

$$u = \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x \quad (6)$$

取反拉氏變換可得

$$U(x, t) = 3 e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x \quad (7)$$

此問題有個有趣的物理解釋。考慮一物質被兩個無限大平面  $x=0$  及  $x=1$  所包圍, 則方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

爲此物質的熱傳導方程式 (Equation for heat conduction) 其中  $U = U(x, t)$  爲任意平面  $x$  在任意時間  $t$  時的溫度。 $k$  爲一常數, 稱爲擴散係數 (Diffusivity), 和物質的特性有關。邊界條件  $U(0, t) = 0$  及  $U(1, t) = 0$  指出在  $x=0$  及  $x=1$  的溫度均保持在零度, 而  $U(x, 0) = 3 \sin 2\pi x$  則指出在  $0 < x < 1$  中, 最初溫度的分布情形, (7)式則指出在  $t > 0$  時, 此物質中任意點的溫度值。更進一步的應用可參見第8章。

3.26 求出下式的有界解答  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $x > 0, t > 0$ , 但  $U(0, t) = 1, U(x, 0) = 0$ .

圖 取偏微分方程式及  $U(0, t) = 1$  的拉氏變換, 得

$$su - U(x, 0) = \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{或} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - su = 0 \quad (f)$$

$$\text{且} \quad u(0, s) = \frac{1}{s} \quad (2)$$

由(1),  $u = u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$ , 但當  $x \rightarrow \infty$  時,  $U(x, t)$  有界,  $u(x, s) = \mathcal{L}\{U(x, t)\}$  亦必須有界, 故  $c_1 = 0$  (假設  $\sqrt{s} > 0$ ), 得

$$u(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s}x} \quad (3)$$

由(2)及(3)得  $c_2 = 1/s$ , 故

$$u(x, s) = \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s}$$

再利用第2章第43題, 得

$$U(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-v^2} dv$$

物理上來說, 此代表在  $x > 0$  時, 物質中任意點的溫度。但在  $x = 0$  這個平面上, 其初溫為零, 而其後溫度保持在一度 (見25題)。

### 其他各類問題

3.27 假設在14題中, 一外力  $F(t)$  施於質點, 且阻滯力為零, (a) 若  $F(t) = F_0 \cot \omega t$ , 求質點在任意時間  $t$  的位置。討論所得結果的物理意義。

圖 (a) 若考慮外力  $F(t)$ , 則運動方程式變為

$$2 \frac{d^2 X}{dt^2} = -8X + F(t) \quad (1)$$

$$\text{即} \quad 2X'' + 8X = F(t) \quad (2)$$

起始條件仍同前, 為

$$X(0) = 10, \quad X'(0) = 0 \quad (3)$$

若  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , (2)式變為

$$2X'' + 8X = F_0 \cos \omega t \quad (4)$$

取拉氏變換, 並將(3)式代入, 得 (其中  $x = \mathcal{L}\{X\}$ ),

$$2\{s^2 x - s(10) - 0\} + 8x = \frac{F_0 s}{s^2 + \omega^2}$$

若  $\omega^2 \neq 4$ , 則

$$x = \frac{10s}{s^2 + 4} + \frac{(F_0/2)s}{(s^2 + 4)(s^2 + \omega^2)} \quad (5)$$

$$\text{即 } x = \frac{10s}{s^2 + 4} + \frac{F_0}{2(\omega^2 - 4)} \left\{ \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (6)$$

$$\text{故 } X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10 \cos 2t + \frac{F_0}{2(\omega^2 - 4)} (\cos 2t - \cos \omega t) \quad (7)$$

若  $\omega^2 = 4$ ，則(5)式變為

$$x = \frac{10s}{s^2 + 4} + \frac{(F_0/2)s}{(s^2 + 4)^2} \quad (8)$$

故利用第2章第13題，得

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10 \cos 2t + \frac{F_0}{8} t \sin 2t \quad (9)$$

- (b) 若  $\omega^2 = 4$  或  $\omega = 2$ ，即外力的頻率和系統的自然頻率相同時，則由(9)式可看出，振盪之振幅將無限增大，此現象稱為共振 (Resonance)，而和  $\omega = 2$  對應之頻率稱為共振頻率 (Resonance frequency)。若質點是連接在彈簧之上，則彈簧最後會被扯斷。

3.28 試求 27 題，若 (a)  $f(t) = F_0 u(t-a)$ ，(b)  $f(t) = F_0 \delta(t)$ 。

圖 (a) 在此情況下，運動方程式為 (參見第 27 題(2))

$$2X'' + 8X = F_0 u(t-a)$$

其中  $X(0) = 10$ ， $X'(0) = 0$ ，取拉氏變換，得

$$2(s^2 x - 10s) + 8x = \frac{F_0 e^{-as}}{s}$$

$$\begin{aligned} \text{且 } x &= \frac{10s}{s^2 + 4} + \frac{F_0 e^{-as}}{2s(s^2 + 4)} \\ &= \frac{10s}{s^2 + 4} + \frac{F_0 e^{-as}}{8} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{故 } X = \begin{cases} 10 \cos 2t + \frac{1}{8} F_0 (1 - \cos 2(t-a)) & \text{if } t > a \\ 10 \cos 2t & \text{if } t < a \end{cases}$$

在  $t = a$  之前，質點的位移和 27 題是相同的，但在  $t = a$  之後，位移就不同了。

(b) 在此情況下，運動方程式為

$$2X'' + 8X = F_0 \delta(t), \quad X(0) = 10, \quad X'(0) = 0$$

取拉氏變換，得

$$2(s^2x - 10s) + 8x = F_0$$

即

$$x = \frac{10s}{s^2 + 4} + \frac{F_0}{2(s^2 + 4)}$$

故

$$X = 10 \cos 2t + \frac{1}{4}F_0 \sin 2t \quad (1)$$

物理上，施外力  $F_0 \delta(t)$ ，相當於在很短時間內，施加一非常大的力量，而在其後完全不加外力，此效果會產生大振幅的位移，比 14 題的位移還大。將(1)式改寫之後，即可看出

$$X = \sqrt{100 + F_0^2/16} \cos(2t - \phi) \quad (2)$$

$$\text{其中 } \cos \phi = \frac{10}{\sqrt{100 + F_0^2/16}}, \quad \sin \phi = \frac{F_0/4}{\sqrt{100 + F_0^2/16}}$$

或  $\tan \phi = F_0/40$ ，故振幅為  $\sqrt{100 + F_0^2/16}$ 。

3.29 若  $Y = Y_1(t)$  滿足下列等式

$$Y''(t) + P(t)Y'(t) + Q(t)Y(t) = 0$$

試求出下式的通解  $Y''(t) + P(t)Y'(t) + Q(t)Y(t) = R(t)$ 。

圖 所欲求解之方程式為

$$Y'' + PY' + QY = R \quad (1)$$

當  $R = 0$  時， $Y = Y_1$  為上式之一解，即

$$Y_1'' + PY_1' + QY_1 = 0 \quad (2)$$

將(1)式乘上  $Y_1$ ，(2)式乘上  $Y$ ，相減得

$$Y_1 Y'' - Y Y_1'' + P(Y_1 Y' - Y Y_1') = R Y_1 \quad (3)$$

可寫成

$$\frac{d}{dt}(Y_1 Y' - Y Y_1') + P(Y_1 Y' - Y Y_1') = R Y_1 \quad (4)$$

上式之積分因式為

$$e^{\int P dt}$$



將(4)式乘上此積分因式，則可寫成

$$\frac{d}{dt} \left\{ e^{\int P dt} (Y_1 Y' - Y Y_1') \right\} = R Y_1 e^{\int P dt} \quad (5)$$

積分得

$$e^{\int P dt} (Y_1 Y' - Y Y_1') = \int R Y_1 e^{\int P dt} dt + c_1 \quad (6)$$

即

$$Y_1 Y' - Y Y_1' = e^{-\int P dt} \int R Y_1 e^{\int P dt} dt + c_1 e^{-\int P dt} \quad (7)$$

其中  $c_1$  為積分後產生的常數。

將(7)式兩邊各除以  $Y_1^2$ ，則可寫成

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Y}{Y_1} \right) = \frac{e^{-\int P dt}}{Y_1^2} \int R Y_1 e^{\int P dt} dt + c_1 \frac{e^{-\int P dt}}{Y_1^2} \quad (8)$$

將(8)式積分，並乘上  $Y_1$ ，則可得 ( $c_2$  亦為積分後產生的常數)

$$Y = c_1 Y_1 \int \frac{e^{-\int P dt}}{Y_1^2} dt + c_2 Y_1 + Y_1 \int \left\{ \frac{e^{-\int P dt}}{Y_1^2} \int R Y_1 e^{\int P dt} dt \right\} dt \quad (9)$$

此即所求之通解。第103題有另解。

3.30 求下式之通解 (a)  $tY'' + 2Y' + tY = 0$ , (b)  $tY'' + 2Y' + tY = \csc t$ .

圖 (a) 由第10題，可得方程式之特解為

$$Y_1(t) = \frac{\sin t}{t}$$

但所給之方程式可寫成29題(1)的形式，其中

$$P = 2/t, \quad Q = 1, \quad R = 0$$

故由29題第(9)式可知通解為

$$\begin{aligned} Y &= c_1 \frac{\sin t}{t} \int \frac{e^{-\int (2/t) dt}}{\sin^2 t/t^2} dt + c_2 \frac{\sin t}{t} \\ &= c_1 \frac{\sin t}{t} \int \csc^2 t dt + c_2 \frac{\sin t}{t} \\ &= c_1 \frac{\sin t}{t} (-\cot t) + c_2 \frac{\sin t}{t} = \frac{A \cos t + B \sin t}{t} \end{aligned}$$

其中  $c_1 = -A$ ,  $c_2 = B$  為任意常數。

(b) 利用29題第(9)式，其中

$$P = 2/t, \quad Q = 1, \quad R = (\csc t)/t$$

故得

$$Y = \frac{A \cos t + B \sin t}{t} - \cos t + \frac{\sin t \ln \sin t}{t}$$

### 3.31 解下列偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + Y = 16x + 20 \sin x$$

邊界條件為

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(\pi, t) = 16\pi, \quad Y_t(x, 0) = 0, \quad Y(x, 0) = 16x + 12 \sin 2x - 8 \sin 3x$$

答 取拉氏變換，得

$$s^2 y - s Y(x, 0) - Y_t(x, 0) - 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = \frac{16x}{s} + \frac{20 \sin x}{s} \quad (1)$$

代入已知條件，得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{4}(s^2 + 1)y = \frac{-4(s^2 + 1)x}{s} - \frac{5 \sin x}{s} - 3s \sin 2x + 2s \sin 3x \quad (2)$$

$$y(0, s) = 0, \quad y(\pi, s) = \frac{16\pi}{s} \quad (3)$$

(2)式的特解形式為

$$y_p = ax + b \sin x + c \sin 2x + d \sin 3x \quad (4)$$

代入(2)式，化簡並比較係數，可得特解為

$$y_p = \frac{16x}{s} + \frac{20 \sin x}{s(s^2 + 5)} + \frac{12s \sin 2x}{s^2 + 17} - \frac{8s \sin 3x}{s^2 + 37} \quad (5)$$

當(2)式的右端改為零時，其通解（此即為餘解，complementary solution）為

$$y_c = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} \quad (6)$$

故(2)式之通解為

$$y = y_p + y_c \quad (7)$$

將(3)代入(7), 得

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} = 0$$

解得  $c_1 = c_2 = 0$ , 故

$$y = \frac{16x}{s} + \frac{20 \sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s \sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s \sin 3x}{s^2+37}$$

再取反拉氏變換, 即可得所求之解

$$Y(x, t) = 16x + 4 \sin x (1 - \cos \sqrt{5}t) + 12 \sin 2x \cos \sqrt{17}t - 8 \sin 3x \cos \sqrt{37}t$$

### 補充題

#### 常係數常微分方程式

利用拉氏變換解下列方程式, 並驗算之。

3.32  $Y''(t) + 4Y(t) = 9t$ ,  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(0) = 7$ . 圖  $Y(t) = 3t + 2 \sin 2t$

3.33  $Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t}$ ,  $Y(0) = 6$ ,  $Y'(0) = -1$ .

圖  $Y(t) = 3e^t - 2e^{2t} + 2t + 3 + 2e^{-t}$

3.34  $Y''(t) - 4Y'(t) + 5Y(t) = 125t^2$ ,  $Y(0) = Y'(0) = 0$ .

圖  $Y(t) = 25t^2 + 40t + 22 + 2e^{2t}(2 \sin t - 11 \cos t)$

3.35  $Y''(t) + Y(t) = 8 \cos t$ ,  $Y(0) = 1$ ,  $Y'(0) = -1$ .

圖  $Y(t) = \cos t - 4 \sin t + 4t \cos t$

3.36  $Y'''(t) - Y(t) = e^t$ ,  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(0) = 0$ ,  $Y''(0) = 0$ .

圖  $Y(t) = \frac{1}{8}te^t + \frac{1}{18}e^{-\frac{1}{2}t} \left\{ 9 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right\} - \frac{1}{2}e^t$

3.37  $Y^{iv}(t) + 2Y''(t) + Y(t) = \sin t$ ,  $Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = Y'''(0) = 0$ .

圖  $Y(t) = \frac{1}{8}\{(3-t^2) \sin t - 3t \cos t\}$

3.38 求下列微分方程式的通解:

(a) 第 2 題, (b) 第 3 題, (c) 第 6 題。

圖 (a)  $Y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 4te^{2t}$

(c)  $Y = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t + \frac{1}{8} \cos 2t$

(b)  $Y = e^{-t}(c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t) + \frac{1}{3}e^{-t} \sin t$

3.39 解  $Y''(t) + 9Y(t) = 18t$  其中  $Y(0) = 0$ ,  $Y(\pi/2) = 0$ . 圖  $Y(t) = 2t + \pi \sin 3t$

3.40 解  $Y^{iv}(t) - 16Y(t) = 30 \sin t$  其中  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(0) = 2$ ,  $Y''(\pi) = 0$ ,  $Y'''(\pi) = -18$ .

圖  $Y = 2(\sin 2t - \sin t)$

3.41 解  $Y'' - 4Y' + 3Y = F(t)$  其中  $Y(0) = 1, Y'(0) = 0$ .

答  $Y = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2} \int_0^t (e^{3u} - e^u) F(t-u) du$

3.42 解下列微分方程式

$$Y'' + 4Y = F(t), \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1$$

其中  $F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

答  $Y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \{ \cos(2t-2) - \cos 2t \}$  for  $t > 1$

且  $Y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$  for  $t < 1$

3.43 解 42 題，其中(a)  $F(t) = u(t-2)$ ，[單位階梯函數]；(b)  $F(t) = \delta(t)$ ，[脈衝函數]；(c)  $F(t) = \delta(t-2)$ 。

答 (a)  $Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2t, & t < 2 \\ \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \{ 1 - \cos(2t-4) \}, & t > 2 \end{cases}$

(b)  $Y(t) = \sin 2t, \quad t > 0$

(c)  $Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2t, & t < 2 \\ \frac{1}{2} \{ \sin 2t + \sin(2t-4) \}^2, & t > 2 \end{cases}$

### 變係數常微分方程式

利用拉氏變換解下列方程式，並驗算之。

3.44  $Y'' + tY' - Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1.$  答  $Y = t$

3.45  $tY'' + (1-2t)Y' - 2Y = 0, \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = 2.$  答  $Y = e^{2t}$

3.46  $tY'' + (t-1)Y' - Y = 0, \quad Y(0) = 5, \quad Y(\infty) = 0.$  答  $Y = 5e^{-t}$

3.47 求下列方程式的有界解答

$$t^2 Y'' + tY' + (t^2 - 1)Y = 0$$

已知  $Y(1) = 2$ 。 答  $2J_1(t)/J_1(1)$

◆

### 聯立常微分方程式

3.48 解  $\begin{cases} Y' + 2Z' = t \\ Y'' - Z = e^{-t} \end{cases}$  已知  $Y(0) = 3, Y'(0) = -2, Z(0) = 0$ .

答  $Y = 2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t, \quad Z = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$

3.49 解  $\begin{cases} Y' - Z' - 2Y + 2Z = \sin t \\ Y'' + 2Z' + Y = 0 \end{cases}$  已知  $Y(0) = Y'(0) = Z(0) = 0$ .

答  $Y = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{15}e^{2t} - \frac{1}{9}\cos t - \frac{2}{9}\sin t + \frac{1}{3}te^{-t}$ ,  $Z = \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{-t}$

3.50 解  $\begin{cases} X' + 2Y'' = e^{-t} \\ X' + 2X - Y = 1 \end{cases}$  已知  $X(0) = Y(0) = Y'(0) = 0$ .

答  $X = 1 + e^{-t} - e^{-at} - e^{-bt}$ ,  $Y = 1 + e^{-t} - be^{-at} - ae^{-bt}$  其中  $a = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$ ,  $b = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$

3.51 解 49 題，但已知  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(x) = 1$ ,  $Z(0) = 0$ .

3.52 解  $\begin{cases} tY + Z + tZ' = (t-1)e^{-t} \\ Y' - Z = e^{-t} \end{cases}$  已知  $Y(0) = 1$ ,  $Z(0) = -1$ .

答  $Y = J_0(t)$ ,  $Z = -J_1(t) - e^{-t}$

3.53 解  $\begin{cases} -3Y'' + 3Z'' = te^{-t} - 3\cos t \\ tY'' - Z' = \sin t \end{cases}$  已知  $Y(0) = -1$ ,  $Y'(0) = 2$ ,  $Z(0) = 4$ ,  $Z''(0) = 0$ .

答  $Y = \frac{2}{3}t^2 + \frac{5}{3}t - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-t}$ ,  $Z = \frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} + \cos t$

3.54 求 49 題方程組的通解。

答  $Y = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}e^{-t}$   
 $Z = 1 - c_2 \sin t - c_3 \cos t - \frac{1}{2}e^{-t}$

### 在力學方面的應用

3.55 參考圖 3-1，若質量為  $m$  之物體受一外力  $\mathcal{F}(t)$ ， $t > 0$ ，但無阻滯力存在。

- (a) 若此物體由  $X = a$  ( $X = 0$  為平衡點) 處釋放，證明在任意時刻  $t > 0$  的位移  $X$ ，可由下列運動方程式求得

$$mX'' + kX = \mathcal{F}(t), \quad X(0) = a, \quad X'(0) = 0$$

其中撇號 ( " ' " , prime ) 代表對  $t$  的微分。

- (b) 若  $\mathcal{F}(t) = F_0$  (一常數)，求在任意時刻  $t > 0$  時的  $X$  值。  
 (c) 若  $\mathcal{F}(t) = F_0 e^{-\alpha t}$  ( $\alpha > 0$ )，求在任意時刻  $t > 0$  時的  $X$  值。

答 (b)  $X = a + \frac{F_0}{k} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$

(c)  $X = a + \frac{F_0}{m\alpha^2 + k} (e^{-\alpha t} - \cos \sqrt{k/m} t) + \frac{\alpha F_0 \sqrt{m/k}}{m\alpha^2 + k} \sin \sqrt{k/m} t$

3.56 若  $\mathcal{F}(t) = F_0 \sin \omega t$ ，重做 55 題，並分兩種情形解之：(a)  $\omega \neq \sqrt{k/m}$ ，(b)  $\omega = \sqrt{k/m}$ 。  
 討論這兩種情況下的物理意義為何。

3.57 一質點沿著直線移動，在任意時刻  $t$  時，自某固定  $O$  算起的位移  $X$ ，滿足

$$X''(t) + 4X(t) + 5X(t) = 80 \sin 5t$$

- (a) 若在  $t = 0$  時，此質點靜止於  $X = 0$ ，求在任意時刻  $t > 0$  時的位移。  
 (b) 經過一段長時間後，求此運動的振幅、週期及頻率。  
 (c) 在(a)的答案中，何者為暫態項？何者為穩態項？  
 (d) 此運動為過阻滯、臨界阻滯或是阻滯振盪？

- 答 (a)  $X(t) = 2e^{-2t}(\cos t + 7 \sin t) - 2(\sin 5t + \cos 5t)$   
 (b) 振幅  $= 2\sqrt{2}$ ，週期  $= 2\pi/5$ ，頻率  $= 5/2\pi$   
 (c) 暫態項， $2e^{-2t}(\cos t + 7 \sin t)$ ；穩態項， $-2(\sin 5t + \cos 5t)$   
 (d) 阻滯振盪

3.58 在  $t = 0$  時，質量  $m$  (參見圖 3-1) 靜止於平衡點  $X = 0$ ，若有一外力突然加於  $m$  上，並立刻移開，以致於  $m$  獲得一向右的瞬時速度  $V_0$ ，證明在任意時刻  $t > 0$  時，相對於平衡點之位移如下

- (a) 無阻滯力時，位移為  $V_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$   
 (b) 若存在一阻滯力  $\beta X'(t)$  ( $\beta < 2\sqrt{km}$ )，則位移為

$$\frac{V_0}{\gamma} e^{-\beta t/2m} \quad \text{where} \quad \gamma = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

3.59 重做 54 題，其中 (a)  $f(t) = F_0 u(t-T)$  [單位階梯函數]；(b)  $f(t) = F_0 \delta(t-T)$  [脈衝函數]。討論其物理意義為何。

- 答 (a)  $X = aF_0 \cos \sqrt{k/m} t$ ， $t < T$  且  
 $X = aF_0 \cos \sqrt{k/m} t + (F_0/k)\{1 - \cos \sqrt{k/m}(t-T)\}$ ， $t > T$   
 (b)  $X = aF_0 \cos \sqrt{k/m} t$ ， $t < T$  且  
 $X = aF_0 \cos \sqrt{k/m} t + (F_0/\sqrt{km}) \sin \sqrt{k/m}(t-T)$ ， $t > T$

3.60 在  $t = 0$  時，質量  $m$  (參見圖 3-1) 靜止於平衡點，此時加上一外力  $F_0 \delta(t)$ ，在下列各情況下，求任意時刻  $t > 0$  時的位移：(a) 此系統為無阻滯，(b) 此系統為臨界阻滯。討論每種情況下的物理意義為何。

- 答 (a)  $\frac{F_0}{\sqrt{km}} \sin \sqrt{k/m} t$ ，(b)  $\frac{F_0}{m} t e^{-\beta t/2m}$

3.61 一球質量為  $m$ ，以速度  $V_0$  自地平面向上拋，證明其最大高度為  $V_0^2/2g$ ，其中  $g$  為重力加速度。

3.62 一質量  $m$  沿  $x$  軸移動，受到一正比於瞬時速率的外力，且此力的方向和運動的方向相反。假設在  $t = 0$  時，此物體位於  $X = a$ ，且正以  $V_0$  的速率向右移動。當此物體停止時，求其位置為何。

3.63 一質點在  $xy$  平面移動，在任意時刻  $t$  時，其位置  $(X, Y)$  滿足

$$X'' + k_1^2 Y = 0, \quad Y'' + k_2^2 X = 0$$

在  $t = 0$  時，此質點自  $(a, b)$  釋放，求任意時刻  $t > 0$  之位置。

$$\begin{aligned} X &= \left( \frac{ak_2 + bk_1}{2k_2} \right) \cos \sqrt{k_1 k_2} t + \left( \frac{ak_2 - bk_1}{2k_2} \right) \cosh \sqrt{k_1 k_2} t \\ Y &= \left( \frac{ak_2 + bk_1}{2k_1} \right) \cos \sqrt{k_1 k_2} t - \left( \frac{ak_2 - bk_1}{2k_1} \right) \cosh \sqrt{k_1 k_2} t \end{aligned}$$

### 電路方面的應用

3.64 一電阻  $R$  歐姆及一電容  $C$  法拉串聯，再加上一電源供應  $E$  伏特的電壓，如圖 3-17 所示。在  $t = 0$  時，電容上之電荷為零，在下列情況，求任意時刻  $t > 0$  時的電荷及電流 (a)  $E = E_0$  (一常數)；(b)  $E = E_0 e^{-\alpha t}$ ， $\alpha > 0$ 。

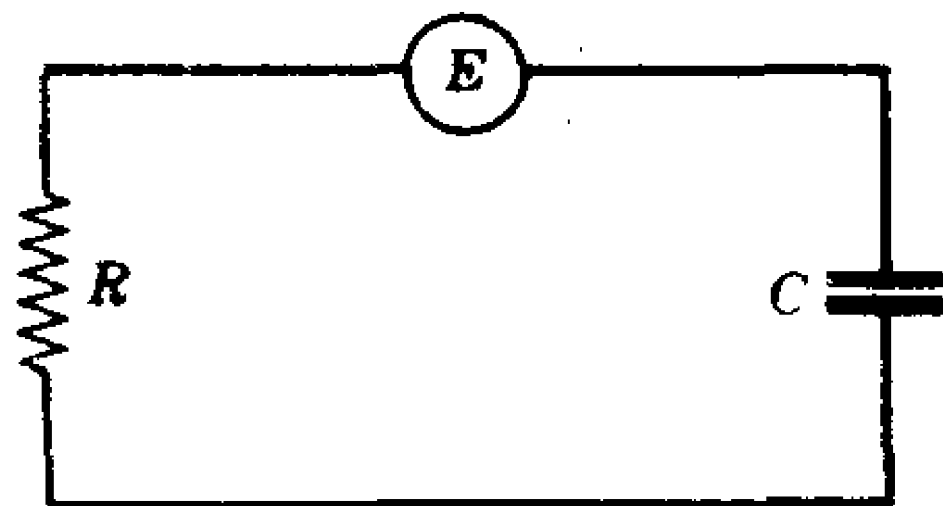


圖 3-17

答 (a)  $Q = CE_0(1 - e^{-t/RC})$ ,  $I = (E_0/R)e^{-t/RC}$

$$\begin{aligned} (b) \quad Q &= \frac{CE_0}{1 - \alpha RC} (e^{-\alpha t} - e^{-t/RC}), \\ I &= \frac{CE_0}{1 - \alpha RC} \left( \frac{e^{-t/RC}}{RC} - \alpha e^{-\alpha t} \right) \text{ 其中 } \alpha \neq 1/RC \end{aligned}$$

3.65 重做 64 題，但  $E = E_0 \sin \omega t$ ，及  $t = 0$  時的電荷值為  $Q_0$ 。

$$\text{答} \quad Q = \left\{ Q_0 + \frac{\omega E_0}{R(\omega^2 + 1/R^2 C^2)} \right\} e^{-t/RC} - \frac{E_0}{R} \left\{ \frac{\omega \cos \omega t - (1/RC) \sin \omega t}{\omega^2 + 1/R^2 C^2} \right\}, \quad I = dQ/dt$$

3.66 一電感  $L$  亨利和電容  $C$  法拉串聯，並加上一電源  $E$  伏特，在  $t = 0$  時，電容中的電荷及電容中的電流均為零。在下列情況下，求任意時刻  $t > 0$  時，電容中的電荷大小：

(a)  $E = E_0$  (一常數)，(b)  $E = E_0 e^{-\alpha t}$ ， $\alpha > 0$

$$\text{答} \quad (a) \quad Q = CE_0 \{1 - \cos(t/\sqrt{LC})\}$$

$$(b) \quad Q = \frac{E_0}{L(\alpha^2 + 1/LC)} \{e^{-\alpha t} - \cos(t/\sqrt{LC})\} + \frac{\alpha E_0 \sqrt{C/L}}{\alpha^2 + 1/LC} \sin(t/\sqrt{LC})$$

3.67 重做 66 題，但  $E = E_0 \sin \omega t$ 。分下列情況討論之：(a)  $\omega \neq 1/\sqrt{LC}$  及 (b)  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ，解釋其物理意義。

3.68 在下列情況下，重做 66 題：(a)  $E(t) = E_0 u(t-a)$ ，其中  $u(t-a)$  為單位階梯函數，(b)  $E(t) = E_0 \delta(t)$ ，其中  $\delta(t)$  為脈衝函數。

答 (a)  $Q = 0$  若  $t < a$ ，且  $CE_0 \left\{ 1 - \cos\left(\frac{t-a}{\sqrt{LC}}\right) \right\}$  若  $t > a$

(b)  $Q = E_0 \sqrt{C/L} \sin(t/\sqrt{LC})$

3.69 一電感 3 亨利和電阻 30 歐姆串聯，並加上電動勢 150 伏特。若  $t = 0$  時，電流為零，求任意時刻  $t > 0$  時的電流值。

答  $I = 5(1 - e^{-10t})$

3.70 重做 69 題，但電動勢改為  $150 \sin 20t$ 。

答  $I = \sin 20t - 2 \cos 20t + 2e^{-10t}$

3.71 (參見圖 3-18) 在  $t = 0$  時，將按鍵  $K$  按下，求其後任意時刻  $t$  時，電容中的電荷及電路中的電流值。其中  $L$ ， $R$ ， $C$ ，及  $E$  均為常數，且在  $t = 0$  時，電荷及電流均為零。討論所有可能發生的情形。

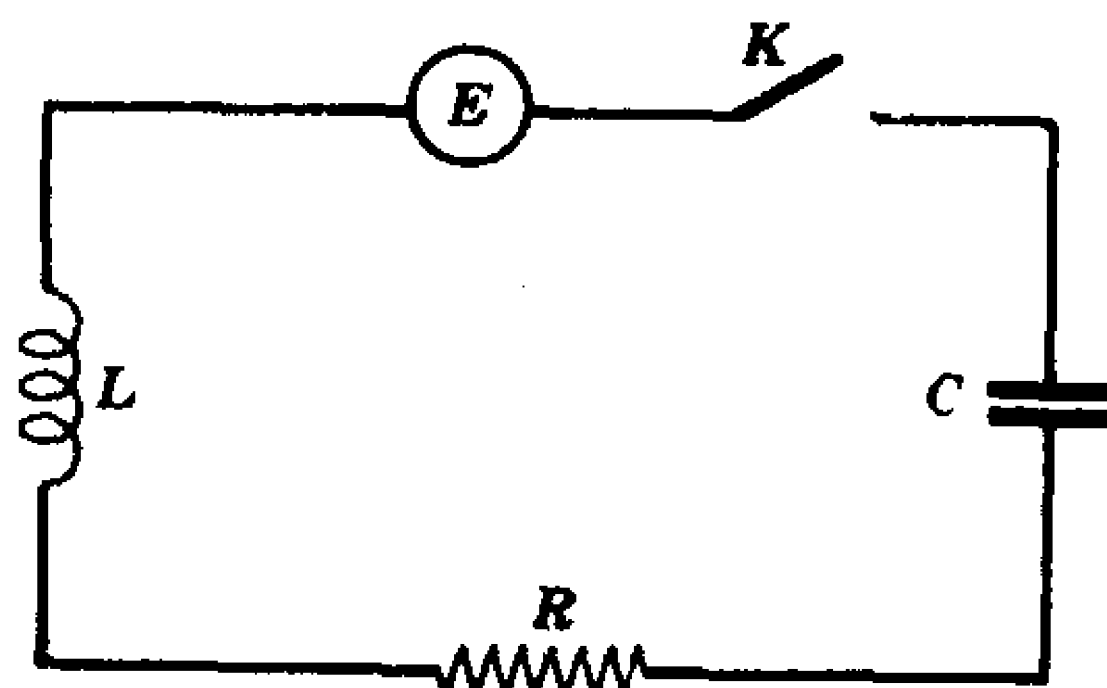


圖 3-18

3.72 (a) 重做 71 題，但  $E = E_0 \sin \omega t$  (b) 證

明在  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$  時發生共振，

(c) 討論  $R = 0$  的情形。

3.73 一電路包含一電感  $L$  亨利和一電容  $C$  法拉的串聯。在  $t = 0$  時，加入一電動勢

$$E(t) = \begin{cases} E_0 t/T_0 & 0 < t < T_0 \\ 0 & t > T_0 \end{cases}$$

若在  $t = 0$  時，電流及電容中的電荷均為零，求在任意時刻  $t > 0$  時的電荷值。

答  $Q = \frac{CE_0}{T_0} \{ t - \sqrt{LC} \sin(t/\sqrt{LC}) \}$ ， $0 < t < T_0$  且

$Q = \frac{CE_0}{T_0} \left\{ T_0 \cos\left(\frac{t-T_0}{\sqrt{LC}}\right) + \sqrt{LC} \sin\left(\frac{t-T_0}{\sqrt{LC}}\right) - \sqrt{LC} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} \right\}$ ， $t > T_0$



### 130 第三章 在微分方程式方面的應用

3.74 在圖 3-19 的電路中，

$$E = 500 \sin 10t$$

$$R_1 = 10 \text{ 歐姆}$$

$$R_2 = 10 \text{ 歐姆}$$

$$L = 1 \text{ 亨利}$$

$$C = 0.01 \text{ 法拉}$$

若在  $t = 0$  時，電容中的電荷及  $I_1$ ， $I_2$

均為零，求在任意時刻  $t > 0$  時，

電容中的電荷值。

答  $Q = \sin 10t - 2 \cos 10t + e^{-10t} (\sin 10t + 2 \cos 10t)$

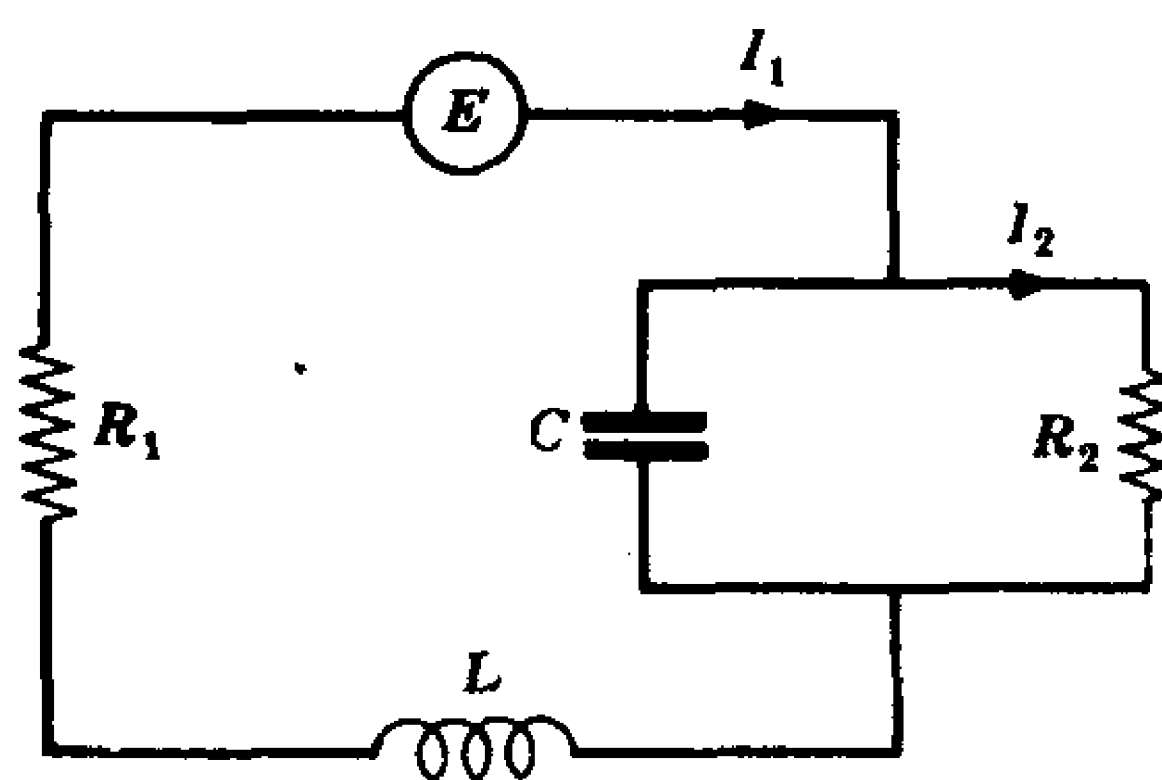


圖 3-19

### 橫樑方面的應用

3.75 一橫樑之端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為固定支承，且其上之均勻負載為每單位長度  $W_0$ ，證

明在任意點之撓度為  $Y(x) = \frac{W_0 x^2 (l-x)^2}{24EI}$

3.76 重做 75 題，但在  $x = 0$  處為固定支承，在  $x = l$  處為鉸支承。

3.77 一懸臂樑在  $x = 0$  為固定支承，在  $x = l$  為自由端，且每單位長之負載為  $W_0$ ，證明其

撓度為  $Y(x) = \frac{W_0 x^2}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2)$

3.78 一橫樑在  $x = 0$  及  $x = l$  為鉸支承，其負載為

$$W(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l/3 \\ W_0 & l/3 < x < l \end{cases}$$

試求其撓度。

3.79 一懸臂樑在  $x = 0$  為固定支承，在  $x = l$  為自由端，具有一集中負載  $P_0$  作用於  $x = l$

處。證明其撓度為  $Y(x) = \frac{P_0 x^2}{6EI} (3l - x)$

3.80 若負載作用於  $x = l/2$  處，試重做 79 題。

3.81 一橫樑在其端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為鉸支承。若一集中負載  $P_0$  垂直作用於  $x = l/2$  處，證明其撓度為

$$Y(x) = \frac{P_0 x}{48EI} (3l^2 - 4x^2) \quad 0 < x < l/2$$

在上式中，將  $x$  以  $l - x$  取代之，即可得在  $l/2 < x < l$  的撓度。

3.82 若端點均為固定支承，重做 81 題。

3.83 一橫樑在端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為鉸支承。若一集中負載  $P_0$  垂直作用於  $x = l/3$  處，證明其撓度為

$$Y(x) = \frac{P_0 x(5l^2 - 9x^2)}{81EI} + \frac{P_0}{6EI} (x - l/3)^3 u(x - l/3)$$

3.84 一橫樑在其端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為鉸支承，且每單位長度受到均勻負載  $W_0$ ，另有一集中負載  $P_0$  作用於  $x = l/2$  處，(a) 求其撓度，(b) 討論(a)所得答案，是否可由 18 題及 81 題的答案來求得，並解釋之。

3.85 一橫樑在其端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為固定支承，且每單位長度受到負載如下：

$$W(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l/2 \\ W_0 x & l/2 < x < l \end{cases}$$

另有一集中負載  $P_0$  作用於  $x = l/3$  處，試求其撓度。

### 偏微分方程式

3.86 解  $\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $U(0, t) = 0$ ,  $U(5, t) = 0$ ,  $U(x, 0) = 10 \sin 4\pi x$ .

圖  $U(x, t) = 10 e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x$

3.87 重做 86 題，其中  $U(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x$ .

圖  $U(x, t) = 10 e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 5 e^{-72\pi^2 t} \sin 6\pi x$

3.88 解  $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ,  $Y(0, t) = 0$ ,  $Y(2, t) = 0$ ,  $Y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x$ .

圖  $Y(x, t) = 20 \sin 2\pi x \cos 6\pi t - 10 \sin 5\pi x \cos 15\pi t$

3.89 以物理觀點解釋下列各題(a) 86 題，(b) 87 題，(c) 88 題。

3.90 解  $\frac{\partial U}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $U_x(0, t) = 0$ ,  $U(\pi/2, t) = 0$  但

(a)  $U(x, 0) = 30 \cos 5x$ , (b)  $U(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x$

圖 (a)  $30 e^{-75t} \cos 5x$ , (b)  $U(x, t) = 20 e^{-27t} \cos 3x - 5 e^{-243t} \cos 9x$

3.91 討論 90 題的物理意義。

3.92 (a) 求解  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4U$ ,  $U(0, t) = 0$ ,  $U(\pi, t) = 0$ ,  $U(x, 0) = 6 \sin x - 4 \sin 2x$ .

(b) 討論可能的物理意義。

$$\text{答 (a) } U(x, t) = 6e^{-5t} \sin x - 4e^{-8t} \sin 2x$$

$$3.93 \quad \text{解 } \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad Y_x(0, t) = 0, Y(3, t) = 0, Y(x, 0) = 0, Y_t(x, 0) = 12 \cos \pi x + 16 \cos 3\pi x - 8 \cos 5\pi x.$$

$$\text{答 } Y(x, t) = 12 \cos \pi x \sin 4\pi t + 16 \cos 3\pi x \sin 12\pi t - 8 \cos 5\pi x \sin 20\pi t$$

3.94 求有界解  $Y(x, t)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$  滿足下列邊界值問題

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 1 - e^{-t}, \quad Y(x, 0) = x$$

$$\text{答 } Y(x, t) = x + 1 - e^{-t}$$

3.95 解下列方程式

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad x > 0, t > 0$$

但

$$Y(0, t) = 10 \sin 2t, \quad Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Y(x, t) = 0$$

## 其他各類問題

3.96 求證微分方程式

$$Y''(t) - k^2 Y(t) = F(t)$$

(但  $Y(0) = a$ ,  $Y'(0) = b$ ) 的解為

$$Y(t) = a \cosh kt + (b/k) \sinh kt + \frac{1}{k} \int_0^t F(u) \sinh k(t-u) du$$

$$3.97 \quad \text{解 } Y^{iv}(t) + Y'''(t) = 2 \sin t, \quad Y(0) = Y'(0) = 0, \quad Y''(0) = 1, \quad Y'''(0) = -2.$$

$$\text{答 } Y = \frac{1}{2}t^2 - 2 + e^{-t} + \sin t + \cos t$$

3.98 求 45 題的通解。

$$\text{答 } Y(t) = c_1 e^{2t} \int \frac{e^{-2t}}{t} dt + c_2 e^{2t}$$

3.99 求具有拉氏變換，且滿足

$$tY'' - (t+2)Y' + 3Y = t - 1$$

的解，但  $Y(0) = 0$ 

3.100 99 題的通解為何？

3.101 (a) 利用拉氏變換，證明方程式

W197304-0 14

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + k^2 Y = A \cos \omega t, \quad Y(0) = \alpha, \quad Y'(0) = \beta$$

$$\text{之解爲} \quad Y(t) = \frac{A (\cos \omega t - \cos kt)}{\omega^2 - k^2} + \alpha \cos kt + (\beta/k) \sin kt.$$

(b) (a)中解答的物理意義為何？

3.102 解  $X$ : 
$$\begin{cases} X' + Y' = Y + Z \\ Y' + Z' = X + Z \\ X' + Z' = X + Y \end{cases} \quad \text{其中 } X(0) = 2, Y(0) = -3, Z(0) = 1.$$

$$\text{答} \quad X = \frac{2}{3} e^{-t/2} \{3 \cos(\sqrt{3} t/2) - 2\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} t/2)\}$$

3.103 令  $Y = VY_1$  (其中  $V$  為新的依變數, Dependent variable), 重做 29 題。

3.104 拉氏變換是否可用於求下式的通解? 試解釋之。

$$Y'' + Y = \sec t$$

3.105 (a) 求下式的有界解

$$(t-1)Y'' + (5-4t)Y' - 4Y = 0$$

但  $Y(0) = 3$ , (b)(a)中方程式的通解為何?

$$\text{答} \quad (a) Y = 3e^{4t}, \quad (b) Y = c_1 e^{4t} \int \frac{e^{-4t}}{t-1} dt + c_2 e^{4t}$$

3.106 (a) 證明

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$$

滿足下列微分方程式

$$\frac{dI}{dt} + I = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad I(0) = \pi/2$$

(b) 藉著解得(a)之微分方程式, 證明

$$I(t) = \frac{\pi}{2} e^t \operatorname{erfc} \sqrt{t}$$

3.107 一質點在直線 ( $x$  軸) 上移動, 受到一排斥力, 其大小正比於此質點和線上另一固定點  $O$  的距離。若此質點在距離  $O$  點為  $a$  的地方釋放, 並具有初速  $V_0$  (方向朝  $O$ ), 求此質點和  $O$  的最小距離。

3.108 若 61 題中的質點受到空氣阻力的作用，此力正比於瞬時速度，證明最大高度為

$$\frac{m}{k^2}(kV_0 + mg - kg) - \frac{m^2g}{k^2}$$

其中  $k$  為比例常數。

3.109 在圖 3-18 中，若電動勢  $E$  為  $t$  的函數，但  $L, R, C$  均為常數。在  $t = 0$  時，將按鍵  $k$  按下；此時電容中的電荷  $Q$  及電路中之電流  $I$  均為零。若  $R^2 < 4L/C$ ，證明在任意時刻  $t > 0$  時之電流為

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_0^t E(t-u) e^{-Ru/2L} \left( \cos \alpha u - \frac{R}{2L\alpha} \sin \alpha u \right) du$$

其中  $\alpha = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$ 。

3.110 重做 109 題，但 (a)  $R^2 = 4L/C$ ，(b)  $R^2 > 4L/C$

3.111 下列各題的力學類比為何？(a) 64 題，(b) 66 題，(c) 71 題。

3.112 下列各題的電學類比為何？(a) 55 題，(b) 57 題。

3.113 74 題的力學類比為何？但須包含彈簧及和彈簧相連之物體。

3.114 一質點之質量為  $m$ ，受  $F(t)$ （如圖 3-20）之作用而在  $x$  軸上移動。若此質點在  $t = 0$  時由靜止釋放，試求在任意時刻  $t > 0$  時的位置及速度。

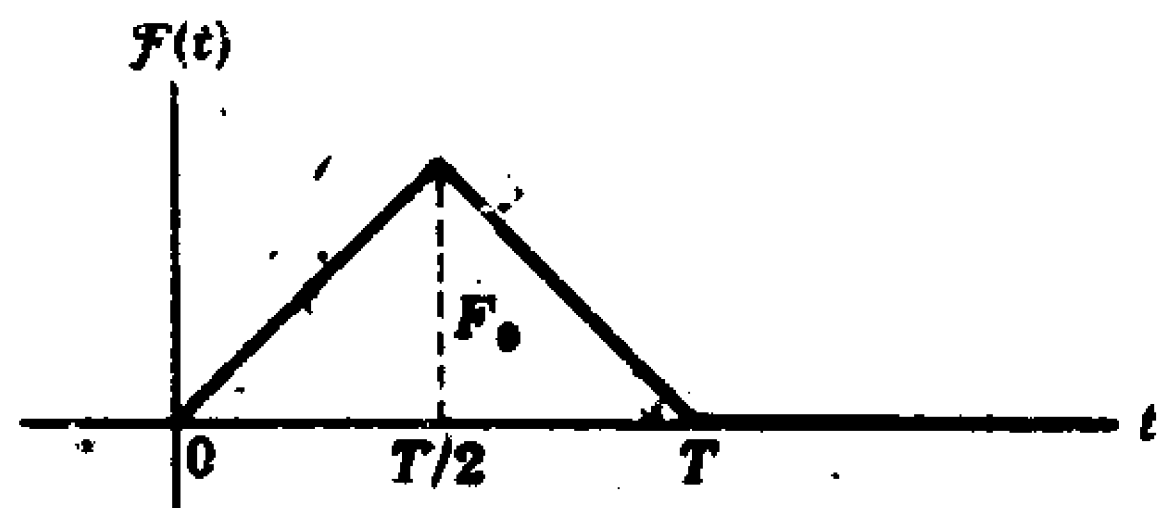


圖 3-20

3.115 一橫樑在  $x = 0$  及  $x = l$  均為固定支承，且有一集中負載  $P_0$  作用於  $x = a$  處，其中  $0 < a < l$ 。證明其撓度為

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{P_0 x^2(l-a)^2}{6EI^3} \{3al - (2a+l)x\} & 0 < x < a \\ \frac{P_0 x^2(l-a)^2}{6EI^3} \{8al - (2a+l)x\} + \frac{P_0(x-a)^3}{6EI} & a < x < l \end{cases}$$

3.116 若上題之橫樑在  $x = 0$  為固定支承，在  $x = l$  為自由端，試重做之。

$$\text{圖 } Y(x) = \begin{cases} \frac{P_0 x^2}{6EI} (3a-x) & 0 < x < a \\ \frac{P_0 a^2}{6EI} (3x-a) & a < x < l \end{cases}$$

3.117 一橫樑在  $x = 0$  及  $x = l$  均為鉸支承，且有兩個集中負載分別作用於  $x = l/3$  及  $x = 2l/3$ ，其大小均為  $P$ 。求其撓度。

3.118 一橫樑置於一彈性基座，且橫樑每單位長度受到  $W(x)$  之作用。撓度之微分方程式為

$$EI \frac{d^4 Y}{dx^4} + kY = W(x)$$

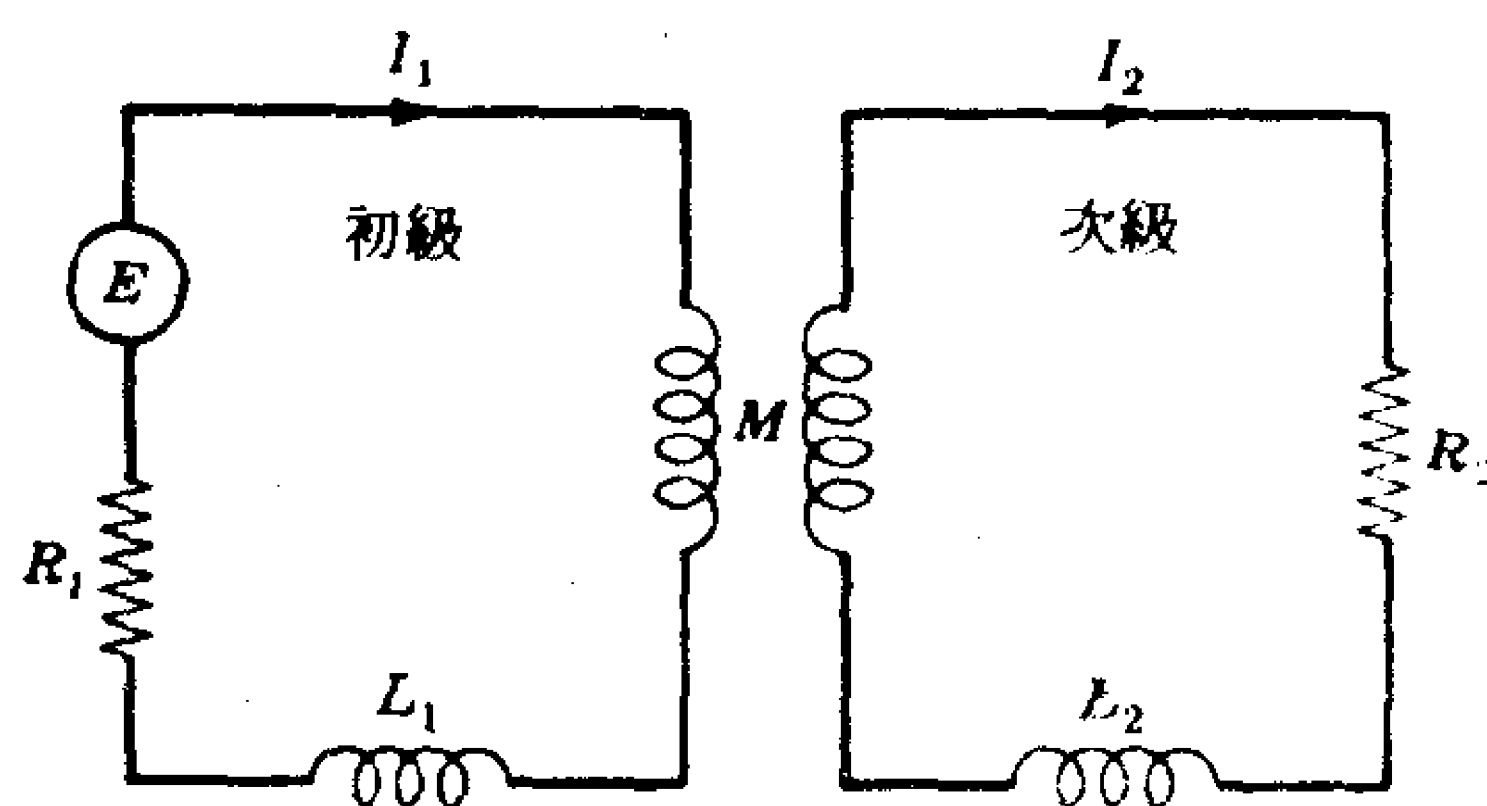
其中  $k$  稱為基座的彈性常數 (Elastic constant of the foundation)。若此橫樑在其端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為固定支承，且每單位長度受到均勻負載  $W_0$  之作用。證明在  $x = 0$  的彎矩為

$$\frac{W_0}{2a} \left( \frac{\sinh al - \sin al}{\sinh al + \sin al} \right)$$

其中  $a = \sqrt[4]{k/4EI}$ 。

3.119 圖 3-21 所示為電感性耦合 (Coupled inductively) 的初級及次級電路 (Primary and secondary circuits)。

(a) 若  $M$  為互感 (Mutual inductance)，證明  $I_1, I_2$  滿足



■ 3-21

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + M \frac{dI_2}{dt} = E$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + M \frac{dI_1}{dt} = 0$$

(b) 若在  $t = 0$  時， $I_1, I_2$  均為零，證明在  $t > 0$  時， $I_1, I_2$  為

$$I_1 = \frac{EL_2}{L_1 L_2 - M^2} \left( \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) + \frac{ER_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \left( \frac{e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1} - \frac{e^{\alpha_2 t}}{\alpha_2} \right) + \frac{E}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{EM}{L_1 L_2 - M^2} \left( \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2$  為下列方程式之根

$$(L_1 L_2 - M^2)\alpha^2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1)\alpha + R_1 R_2 = 0$$

3.120 若  $L_1 L_2 = M^2$  討論 119 題。



## 第四章

# 積分及差分方程式方面的應用

### 4.1 積分方程式

積分方程式 (Integral equation) 之形式爲

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u, t) Y(u) du \quad (1)$$

其中  $F(t)$  及  $K(u, t)$  爲已知， $a, b$  爲已知常數或是  $t$  的函數，我們所欲求得的函數，就是積分號內的函數  $Y(t)$ 。

函數  $K(u, t)$  通常稱爲此積分方程式的核 (kernel)。若  $a, b$  均爲常數，則原方程式稱爲佛瑞德哈姆積分方程式 (Fredholm integral equation)，若  $a$  爲常數， $b = t$ ，則原方程式稱爲沃太拉積分方程式 (Volterra integral equation)。

線性微分方程式可轉化爲積分方程式，參見 1 ~ 3 題及 25 題。

### 4.2 褶積型的積分方程式

有一種特殊的積分方程式在實用上很重要

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u) Y(u) du \quad (2)$$

此方程式爲褶積型 (Convolution type)，可寫成

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t)$$

取拉氏變換，並假設  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$  及  $\mathcal{L}\{K(t)\} = k(s)$  均存在，則

$$y(s) = f(s) + k(s)y(s) \quad \text{即} \quad y(s) = \frac{f(s)}{1 - k(s)}$$

可由反拉氏變換求解，參見第 5，6 題。



### 4.3 阿貝爾積分方程式及等時間題

一種重要的褶積型積分方程式，稱為阿貝爾積分方程式 (Abel's integral equation) 為

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^\alpha} du = G(t) \quad (3)$$

其中  $G(t)$  已知，且  $\alpha$  為在 0 和 1 之間的常數。

阿貝爾積分方程式的應用為：求出一落於垂直平面上之無摩擦鐵線的形狀，使得一珠子沿著鐵線滑落至最低點時，其所需的時間  $T$  和珠子的最初位置無關。此問題稱等時間題 (Tautochrone problem)，此鐵線的形狀可被證明為擺線 (Cycloid) (見第 7 ~ 9 題)。

### 4.4 積分微分方程式

積分微分方程式 (Integro-differential equation) 為包含未知函數  $Y(t)$  之導式的積分方程式。例如

$$Y''(t) = Y(t) + \sin t + \int_0^t \cos(t-u) Y(u) du \quad (4)$$

即為一積分微分方程式。此類方程式再配合已知的起始條件，可用拉氏變換解之 (見第 10 題)。

### 4.5 差分方程式

一方程式包含  $Y(t)$  及其他  $Y(t-\alpha)$  (其中  $\alpha$  為常數) 的關係式，稱為差分方程式 (Difference equation)。

#### 例題 4.1

$Y(t) - 4Y(t-1) + 3Y(t-2) = t$  為差分方程式。

在許多應用方面，我們可以先建立差分方程式，再由其中解得特殊條件下的未知函數  $Y(t)$ 。欲求  $Y(t)$  亦即解 (Solving) 差分方程式，常可利用拉氏變換來達成 (見 11 題)。

差分方程式包含了數列  $a_0, a_1, a_2, \dots$  的關係式，例如  $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ ，其中  $a_0 = 0, a_1 = 1$ ，可由拉氏變換解之，見 18, 19 及 24 題。

## 4-6 微分差分方程式

微分差分方程式 (Differential-difference equation) 為包含未知函數  $Y(t)$  之導式的差分方程式。例如

$$Y'(t) = Y(t-1) + 2t \quad (5)$$

即為一微分差分方程式，見 12 題。

亦可能出現一種積分微分差分方程式，它是由未知函數  $Y(t)$  出現在積分號內的微分差分方程式所形成。

## 附解題

### 積分方程式

#### 4.1 將下列微分方程式

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4 \sin t, \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = -2$$

改為積分方程式。

圖解 1：

令  $Y'(t) = V(t)$ ，則利用第 2 章 23 題，並代入  $Y'(0) = -2$  及  $Y(0) = 1$ ，可得

$$Y'(t) = \int_0^t V(u) du - 2, \quad Y(t) = \int_0^t (t-u) V(u) du - 2t + 1$$

故微分方程式變為

$$V(t) - 3 \int_0^t V(u) du + 6 + 2 \int_0^t (t-u) V(u) du - 4t + 2 = 4 \sin t$$

即

$$V(t) = 4 \sin t + 4t - 8 + \int_0^t \{3 - 2(t-u)\} V(u) du$$

解 2：

對所給之微分方程式兩邊積分，得

$$\int_0^t \{Y''(u) - 3Y'(u) + 2Y(u)\} du = \int_0^t 4 \sin u du$$

$$\text{即 } Y(t) - Y'(0) - 3Y(t) + 3Y(0) + 2 \int_0^t Y(u) du = 4 - 4 \cos t$$

代入  $Y'(0) = -2$  及  $Y(0) = 1$ , 上式變為

$$Y'(t) - 3Y(t) + 2 \int_0^t Y(u) du = -1 - 4 \cos t$$

如同前面之方法, 將上式由 0 至  $t$  積分, 得

$$Y(t) - Y(0) - 3 \int_0^t Y(u) du + 2 \int_0^t (t-u) Y(u) du = -t - 4 \sin t$$

$$\text{即 } Y(t) + \int_0^t \{2(t-u) - 3\} Y(u) du = 1 - t - 4 \sin t$$

#### 4.2 將下列微分方程式

$$Y''(t) + (1-t)Y'(t) + e^{-t}Y(t) = t^3 - 5t, \quad Y(0) = -3, \quad Y'(0) = 4$$

轉化成積分方程式。

圖解 1 :

令  $Y''(t) = V(t)$  且利用  $Y'(0) = 4$ ,  $Y(0) = -3$  可得 (如同第 1 題的解 1),

$$Y'(t) = \int_0^t V(u) du + 4, \quad Y(t) = \int_0^t (t-u) V(u) du + 4t - 3$$

故微分方程式變為

$$V(t) + (1-t) \int_0^t V(u) du + 4(1-t) + e^{-t} \int_0^t (t-u) V(u) du + 4te^{-t} - 3e^{-t} = t^3 - 5t$$

可改寫成

$$V(t) = t^3 - t - 4 + 3e^{-t} - 4te^{-t} + \int_0^t \{t-1-e^{-t}(t-u)\} V(u) du$$

解 2 :

將原方程式兩邊積分 (如同第 1 題, 解 2) 得

$$\int_0^t Y''(u) du + \int_0^t (1-u) Y'(u) du + \int_0^t e^{-u} Y(u) du = \int_0^t (u^3 - 5u) du$$

在第二個積分式中，利用部份積分，得

$$Y'(t) - Y'(0) + \left\{ (1-u)Y(u) \Big|_0^t + \int_0^t Y(u) du \right\} + \int_0^t e^{-u} Y(u) du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

即

$$Y'(t) - Y'(0) + (1-t)Y(t) - Y(0) + \int_0^t Y(u) du + \int_0^t e^{-u} Y(u) du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

$$\text{故 } Y'(t) + (1-t)Y(t) + \int_0^t Y(u) du + \int_0^t e^{-u} Y(u) du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2} + 1$$

再從 0 至  $t$  積分得

$$\begin{aligned} Y(t) - Y(0) + \int_0^t (1-u)Y(u) du + \int_0^t (t-u)Y(u) du + \int_0^t (t-u)e^{-u}Y(u) du \\ = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t \end{aligned}$$

可寫成

$$Y(t) + \int_0^t \{1+t-2u+(t-u)e^{-u}\}Y(u) du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t - 3$$

#### 4.3 將下列微分方程式轉化成積分方程式

$$Y^{(4)}(t) - 4Y'''(t) + 6Y''(t) - 4Y'(t) + Y(t) = 3\cos 2t$$

但  $Y(0) = -1$ ,  $Y'(0) = 4$ ,  $Y''(0) = 0$ ,  $Y'''(0) = 2$ .

解 1 :

令  $Y^{(4)}(t) = V(t)$ ，則如同在第 1 題及第 2 題的方法，可得

$$\begin{aligned} Y'''(t) &= \int_0^t V(u) du + 2, & Y''(t) &= \int_0^t (t-u)V(u) du + 2t \\ Y'(t) &= \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!} V(u) du + t^2 + 4, & Y(t) &= \int_0^t \frac{(t-u)^3}{3!} V(u) du + \frac{t^3}{3} + 4t - 1 \end{aligned}$$

將以上代入微分方程式，可得

$$V(t) = 25 - 16t + 4t^2 - \frac{1}{8}t^3 + 3\cos 2t + \int_0^t \{4 - 6(t-u) + 2(t-u)^2 - \frac{1}{8}(t-u)^3\} V(u) du$$

解 2 :

如同第 1, 2 題的解 2，將原式從 0 至  $t$  積分，則可得積分方程式

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t \{4 - 6(t-u) + 2(t-u)^2 - \frac{1}{8}(t-u)^3\} Y(u) du \\ &= -\frac{19}{16} + 8t - \frac{85t^2}{8} + 5t^3 + \frac{3}{16}\cos 2t \end{aligned}$$

這些積分方程式，亦如同第 1, 2 題的方程式，都是沃太拉積分方程式 (Volterra integral equations)，其積分的上下限都是由 0 至  $t$ 。一般而言，此種形式的積分方程式，均由某一點之各相關條件已知的線性微分方程式所轉化而得。佛瑞德哈姆方程式 (Fredholm integral equation) 則由某兩點之各相關條件已知的線性微分方程式而來，其例可參見 25 題。

#### 4.4 將下面之積分方程式

$$Y(t) = 3t - 4 - 2 \sin t + \int_0^t \{(t-u)^2 - 3(t-u) + 2\} Y(u) du$$

轉化成微分方程式。

答 利用萊普尼茨規則，

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} K(u, t) du = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K}{\partial t} du + K\{b(t), t\} \frac{db}{dt} - K\{a(t), t\} \frac{da}{dt} \quad (1)$$

將原式微分，可得

$$Y'(t) = 3 - 2 \cos t + \int_0^t 2(t-u) Y(u) du - 3 \int_0^t Y(u) du + 2Y(t) \quad (2)$$

再微分一次可得

$$Y''(t) = 2 \sin t + 2 \int_0^t Y(u) du - 3Y(t) + 2Y'(t) \quad (3)$$

再微分一次，即可得所需之微分方程式

$$Y'''(t) = 2 \cos t + 2Y(t) - 3Y'(t) + 2Y''(t) \quad (4)$$

即 
$$Y''' - 2Y'' + 3Y' - 2Y = 2 \cos t$$

令  $t = 0$ ，代入原式及(2)，(3)式，可得起始條件為

$$Y(0) = -4, \quad Y'(0) = -7, \quad Y''(0) = -2$$

注意到起始條件乃包含於原先之積分方程式中。

每一個線性微分方程式，均可轉化成積分方程式，然而並不是每一個積分方程式都可化成微分方程式，例如

$$Y(t) = \cos t + \int_0^t \ln(u+t) Y(u) du$$

#### 褶積型的積分方程式

4.5 解下述之積分方程式  $Y(t) = t^2 + \int_0^t Y(u) \sin(t-u) du$ .

答 原式可寫成

$$Y(t) = t^2 + Y(t) * \sin t$$

取拉氏變換，並應用褶積定理，可得（令  $y = \mathcal{L}\{Y\}$ ），

$$y = \frac{2}{s^3} + \frac{y}{s^2+1}$$

解得 
$$y = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

故 
$$Y = 2\left(\frac{t^2}{2!}\right) + 2\left(\frac{t^4}{4!}\right) = t^2 + \frac{1}{12}t^4$$

此答案可直接代入原式驗證之。

4.6 解下述之積分方程式  $\int_0^t Y(u) Y(t-u) du = 16 \sin 4t$ .

答 原式可寫成

$$Y(t) * Y(t) = 16 \sin 4t$$

取拉氏變換，得

$$\{y(s)\}^2 = \frac{64}{s^2+16} \quad \text{即} \quad y(s) = \frac{\pm 8}{\sqrt{s^2+16}}$$

得 
$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \pm 8 J_0(4t)$$

故  $Y(t) = 8 J_0(4t)$  及  $Y(t) = -8 J_0(4t)$  均為所求之解。

### 阿貝爾積分方程式，等時間問題

4.7 解  $\int_0^t \frac{Y(u)}{\sqrt{t-u}} du = 1 + t + t^2$ .

答 原式可寫成

$$Y(t) * t^{-1/2} = 1 + t + t^2$$

取拉氏變換得

$$\mathcal{L}\{Y\} \mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \mathcal{L}\{1+t+t^2\}$$

即 
$$\frac{y \Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

故 
$$y = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left\{ \frac{1}{s^{1/2}} + \frac{1}{s^{3/2}} + \frac{2}{s^{5/2}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{取反拉氏變換 } Y &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left\{ \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + \frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \frac{2t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} (t^{-1/2} + 2t^{1/2} + \frac{8}{3}t^{3/2}) = \frac{t^{-1/2}}{3\pi} (3 + 6t + 8t^2) \end{aligned}$$

此積分方程式為阿貝爾積分方程式 (Abel's integral equation) 的特例。

- 4.8 一玻璃珠沿一無摩擦鐵線運動，且此鐵線落於一垂直平面上。假設此珠子由鐵線上之任意指定點下滑（由靜止起動，並僅受重力作用），求此珠子落至底端所需之時間。

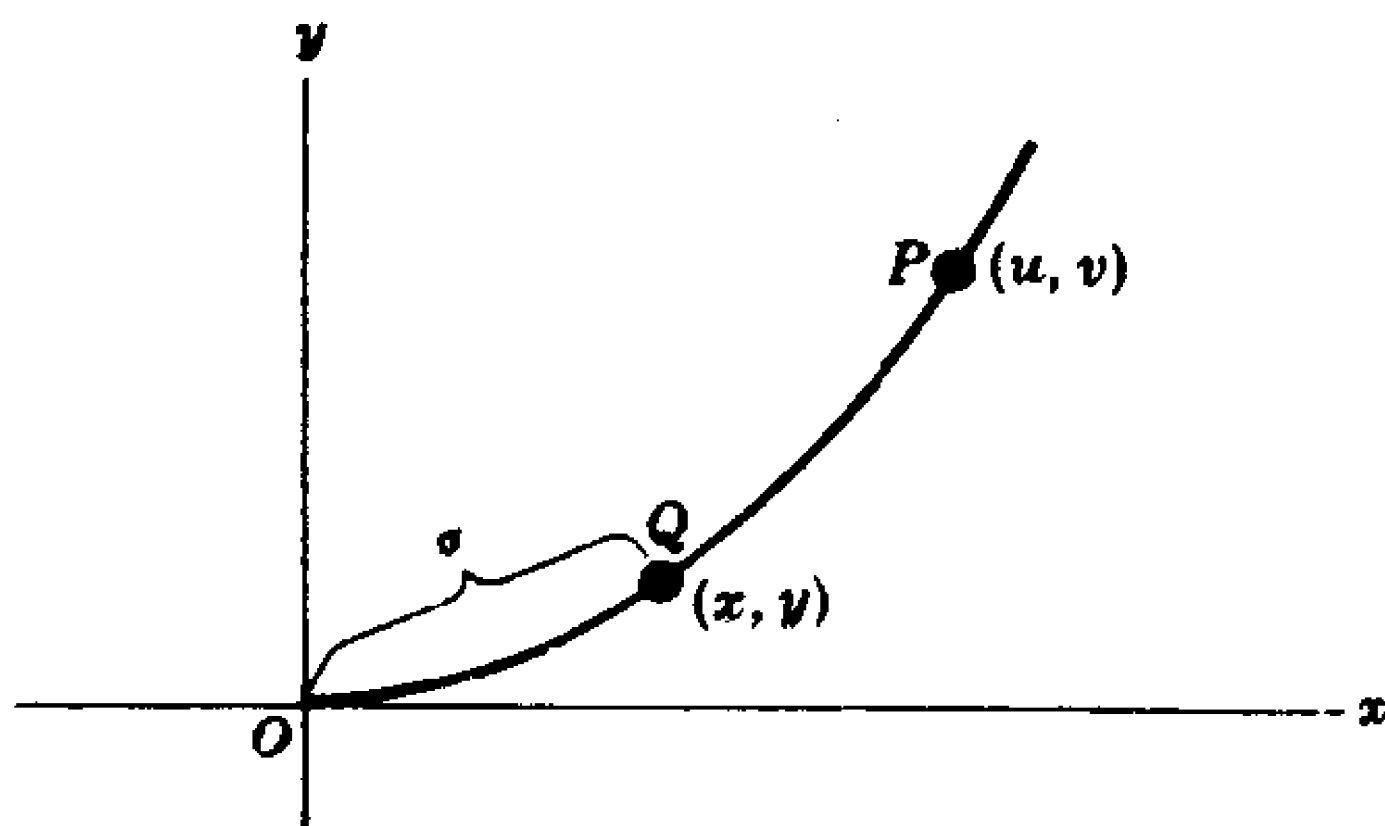


圖 4-1

圈 假設此珠子之質量為  $m$ ，且自  $P(u, v)$  靜止起動，如圖 4-1 所示。  $Q(x, y)$  為在此運動中所經過的任意點，且假設最低點為原點  $O$ 。令  $\sigma$  代表弧  $OQ$  的長度，由能量守恒，可知

$$P \text{ 點的位能} + P \text{ 點的動能} = Q \text{ 點的位能} + Q \text{ 點的動能}$$

$$\frac{1}{2}mgv + 0 = \frac{1}{2}mgy + \frac{1}{2}m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$$

其中  $d\sigma/dt$  為質點在  $Q$  的瞬時速率，即

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2g(v-y)$$

但  $\sigma$  隨著  $t$  遞減，故

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\sqrt{2g(v-y)} \quad (1)$$

故此珠子由  $P$  滑至  $Q$  的總時間  $T$  為

$$T = \int_0^T dt = \int_v^0 \frac{-d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}} = \int_0^v \frac{d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}} \quad (2)$$

若此滑形曲線的形狀已知，則弧長可以  $s$  表示之，故

$$d\sigma = F(y) dy \quad (3)$$

(2) 式變為

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^v \frac{F(y) dy}{\sqrt{v-y}} \quad (4)$$

一般而言， $T$  是  $v$  (起點) 的函數。

4.9 若抵達最低點的時間為一常數 (和起點無關)，求第 8 題的鐵線之形狀為何？

解 在此情況下，我們必須求  $F(y)$  滿足

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^v \frac{F(y) dy}{\sqrt{v-y}} \quad (1)$$

其中  $T$  為常數。褶積型積分方程式為阿貝爾積分方程式 (Abel's integral equation) 的特例，故原式可寫成

$$\sqrt{2g} T = F(y) * y^{-1/2} \quad (2)$$

取拉氏變換，並代入  $\mathcal{L}\{F(y)\} = f(s)$ ,  $\mathcal{L}\{y^{-1/2}\} = \Gamma(1/2)/s^{1/2} = \sqrt{\pi}/s^{1/2}$ ，可得

$$\frac{\sqrt{2g} T}{s} = f(s) \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} \quad \text{即} \quad f(s) = \frac{T \sqrt{2g}}{\sqrt{\pi} s^{1/2}}$$

取反拉氏變換，得

$$F(y) = \frac{T \sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1/2}} \right\} = \frac{T \sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}} \frac{y^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{T \sqrt{2g}}{\pi} y^{-1/2}$$

但 
$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

故 
$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{T \sqrt{2g}}{\pi} y^{-1/2} \quad (3)$$



若令  $\sqrt{b} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi}$  即  $b = \frac{2gT^2}{\pi^2}$  (4)

則(3)式可寫成  $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{b}{y}$  即  $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{b-y}{y}}$

(因為斜率必為正數)。積分後可得

$$x = \int \sqrt{\frac{b-y}{y}} dy + c \quad (5)$$

令  $y = b \sin^2 \theta$ ，則上式可寫成

$$\begin{aligned} x &= \int \sqrt{\frac{b \cos^2 \theta}{b \sin^2 \theta}} \cdot 2b \sin \theta \cos \theta d\theta + c \\ &= 2b \int \cos^2 \theta d\theta + c = b \int (1 + \cos 2\theta) d\theta + c = \frac{b}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + c \end{aligned}$$

故所求曲線的參數方程式為

$$x = \frac{b}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + c, \quad y = b \sin^2 \theta = \frac{b}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

但此曲線必經  $x = 0$ ， $y = 0$ ，故  $c = 0$ 。再令

$$a = \frac{b}{2} = \frac{gT^2}{\pi^2} \quad \text{及} \quad \phi = 2\theta$$

曲線方程式則為

$$x = a(\phi + \sin \phi), \quad y = a(1 - \cos \phi)$$

此即為擺線的參數方程式(見下面之圖4-2)。對於一給定的 $T$ 而言，曲線的外形即如圖中實線所示。當滾輪沿一直線滾動時，滾輪邊緣上任一點形成的軌跡即為擺線(見第44題)。

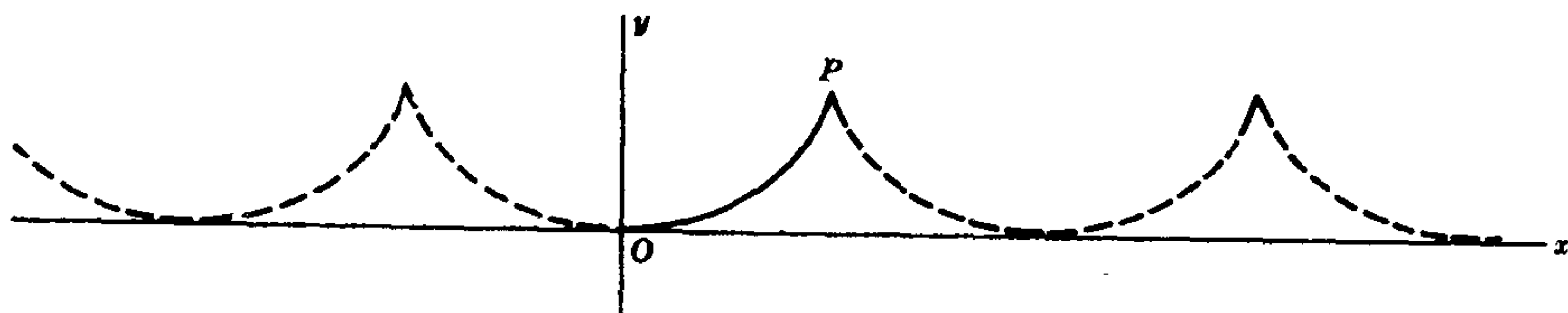


圖 4-2

## 積分微分方程式

4.10 解  $Y'(t) + 5 \int_0^t \cos 2(t-u) Y(u) du = 10$  , 其中  $Y(0) = 2$  .

圖 原式可寫成

$$Y'(t) + 5 \cos 2t * Y(t) = 10$$

取拉氏變換，得

$$sY - Y(0) + \frac{5sY}{s^2 + 4} = \frac{10}{s}$$

即

$$Y = \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2 + 9)}$$

再由第2章第44題可得

$$Y = \frac{1}{27}(24 + 120t + 30 \cos 3t + 50 \sin 3t)$$

將原式由 0 至  $t$  積分，並利用  $Y(0) = 2$ ，則原先之積分微分方程式可轉化成積分方程式

$$Y(t) + 5 \int_0^t (t-u) \cos 2(t-u) Y(u) du = 10t + 2$$

## 差分及微分差分方程式

4.11 解  $3Y(t) - 4Y(t-1) + Y(t-2) = t$  其中若  $t < 0$ ，則  $Y(t) = 0$ 。

圖 取拉氏變換，得

$$3\mathcal{L}\{Y(t)\} - 4\mathcal{L}\{Y(t-1)\} + \mathcal{L}\{Y(t-2)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{但 } \mathcal{L}\{Y(t-1)\} &= \int_0^\infty e^{-st} Y(t-1) dt \\ &= \int_{-1}^\infty e^{-s(u+1)} Y(u) du \quad [\text{令 } t = u+1] \\ &= e^{-s} \int_{-1}^0 e^{-su} Y(u) du + e^{-s} \int_0^\infty e^{-su} Y(u) du \\ &= e^{-s} Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{且 } \mathcal{L}\{Y(t-2)\} &= \int_0^\infty e^{-st} Y(t-2) dt \\
&= \int_{-2}^\infty e^{-s(u+2)} Y(u) du \quad [\text{令 } t = u+2] \\
&= e^{-2s} \int_{-2}^0 e^{-su} Y(u) du + e^{-2s} \int_0^\infty e^{-su} Y(u) du \\
&= e^{-2s} y
\end{aligned}$$

又因當  $u < 0$  時,  $Y(u) = 0$ , 故

$$\int_{-2}^0 e^{-su} Y(u) du = 0 \quad \text{且} \quad \int_{-2}^0 e^{-su} Y(u) du = 0$$

所以(1)式可寫成

$$3y - 4e^{-s}y + e^{-2s}y = \frac{1}{s^2}$$

即

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{s^2(3 - 4e^{-s} + e^{-2s})} = \frac{1}{s^2(1 - e^{-s})(3 - e^{-s})} \\
&= \frac{1}{2s^2} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-s}} - \frac{1}{3 - e^{-s}} \right\} \\
&= \frac{1}{2s^2} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-s}} - \frac{1}{3(1 - e^{-s}/3)} \right\} \\
&= \frac{1}{2s^2} \left\{ (1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \dots) - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{e^{-s}}{3} + \frac{e^{-2s}}{3^2} + \frac{e^{-3s}}{3^3} + \dots \right) \right\} \\
&= \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) \frac{e^{-ns}}{s^2}
\end{aligned}$$

$$\text{故 } Y = \frac{t}{3} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{[t]} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) (t - n)$$

其中  $[t]$  為小於或等於  $t$  的最大整數。

4.12 解  $Y'(t) + Y(t-1) = t^2$  其中若  $t \leq 0$ , 則  $Y(t) = 0$

圈 取拉氏變換, 得

$$\mathcal{L}\{Y'(t)\} + \mathcal{L}\{Y(t-1)\} = 2/s^3 \quad (1)$$

$$\text{其中 } \mathcal{L}\{Y'(t)\} = s\mathcal{L}\{Y\} - Y(0) = sy - 0 = sy$$

且

$$\mathcal{L}\{Y(t-1)\} = \int_0^\infty e^{-st} Y(t-1) dt$$

WB 7304 - 8 B8

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{\infty} e^{-s(u+1)} Y(u) du \quad [\text{令 } t = u+1] \\
&= e^{-s} \int_{-1}^0 e^{-su} Y(u) du + e^{-s} \int_0^{\infty} e^{-su} Y(u) du \\
&= e^{-s} y
\end{aligned}$$

但若  $u \leq 0$  時,  $Y(u) = 0$ , 故  $\int_{-1}^0 e^{-su} Y(u) du = 0$ . 所以(1)式可寫成

$$sy + e^{-s}y = \frac{2}{s^3} \quad \text{即} \quad y = \frac{2}{s^3(s + e^{-s})}$$

利用級數, 可得

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2}{s^3(s + e^{-s})} = \frac{2}{s^4(1 + e^{-s}/s)} \\
&= \frac{2}{s^4} \left( 1 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} + \dots \right) \\
&= \frac{2}{s^4} - \frac{2e^{-s}}{s^5} + \frac{2e^{-2s}}{s^6} - \frac{2e^{-3s}}{s^7} + \dots \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}
\end{aligned}$$

但  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}} \right\} = \begin{cases} \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} & t \geq n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

若  $[t]$  代表小於或等於  $t$  的最大整數, 則

$$Y(t) = 2 \sum_{n=0}^{[t]} \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} \quad (2)$$

4.13 在 12 題中, 求 (a)  $Y(4)$ , (b)  $Y(\pi)$ 。

解 (a) 因  $[4] = 4$ , 故

$$Y(4) = 2 \sum_{n=0}^4 \frac{(4-n)^{n+3}}{(n+3)!} = 2 \left\{ \frac{4^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} \right\} = 28.62 \quad (\text{近似值})$$

(b) 因  $[\pi] = 3$ , 故

$$Y(\pi) = 2 \sum_{n=0}^3 \frac{(\pi-n)^{n+3}}{(n+3)!} = 2 \left\{ \frac{\pi^3}{3!} + \frac{(\pi-1)^4}{4!} + \frac{(\pi-2)^5}{5!} + \frac{(\pi-3)^6}{6!} \right\} = 12.12 \quad (\text{近似值})$$

4.14 若  $F(t) = r^n$  其中  $n \leq t < n+1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$

答

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \\&= \int_0^1 e^{-st} r^0 dt + \int_1^2 e^{-st} r^1 dt + \int_2^3 e^{-st} r^2 dt + \dots \\&= \frac{1-e^{-s}}{s} + r \left( \frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s} \right) + r^2 \left( \frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s} \right) + \dots \\&= \frac{1-e^{-s}}{s} (1 + re^{-s} + r^2 e^{-2s} + \dots) \\&= \frac{1-e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1-re^{-s}} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\end{aligned}$$

4.15 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})} \right\}$ .

答 由 14 題, 可得  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})} \right\} = F(t) = r^n$  其中  $n \leq t < n+1$ 。

另解:

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})} &= \frac{1-e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1-re^{-s}} \\&= \frac{1-e^{-s}}{s} (1 + re^{-s} + r^2 e^{-2s} + \dots) \\&= \int_0^1 e^{-st} r^0 dt + \int_1^2 e^{-st} r^1 dt + \int_2^3 e^{-st} r^2 dt + \dots \\&= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt\end{aligned}$$

其中  $F(t) = r^n$  且  $n \leq t < n+1$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

4.16 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})} \right\}$ .

答 若  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ , 則由第 2 章之定理 2-4, 可得

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}f(s)\} = \begin{cases} F(t-1) & t > 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$$

再由 15 題, 得

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})} \right\} = F(t-1) = r^n \text{ 其中 } n \leq t-1 < n+1, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

或者也可寫成

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = r^{n-1} \quad \text{其中 } n \leq t < n+1, n=1,2,3,\dots$$

4.17 令  $Y(t) = a_n$  其中  $n \leq t < n+1$  且  $n=0,1,2,\dots$  將下列二式以  $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$  表之 (a)  $\mathcal{L}\{Y(t+1)\}$  及 (b)  $\mathcal{L}\{Y(t+2)\}$

圈 (a) 令  $t+1 = u$ , 得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{Y(t+1)\} &= \int_0^\infty e^{-st} Y(t+1) dt = e^s \int_1^\infty e^{-su} Y(u) du \\ &= e^s \int_0^\infty e^{-su} Y(u) du - e^s \int_0^1 e^{-su} Y(u) du \\ &= e^s y(s) - e^s \int_0^1 e^{-su} a_0 du = e^s y(s) - \frac{a_0 e^s (1 - e^{-s})}{s} \end{aligned}$$

其中用到  $Y(t) = a_0, 0 \leq t < 1$

(b) 令  $t+2 = u$ , 得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{Y(t+2)\} &= \int_0^\infty e^{-st} Y(t+2) dt \\ &= e^{2s} \int_2^\infty e^{-su} Y(u) du \\ &= e^{2s} \left\{ \int_0^\infty e^{-su} Y(u) du - \int_0^1 e^{-su} Y(u) du - \int_1^2 e^{-su} Y(u) du \right\} \\ &= e^{2s} y(s) - e^{2s} \int_0^1 e^{-su} a_0 du - e^{2s} \int_1^2 e^{-su} a_1 du \\ &= e^{2s} y(s) - \frac{a_0 e^{2s} (1 - e^{-s})}{s} - \frac{a_1 e^{2s} (e^{-s} - e^{-2s})}{s} \\ &= e^{2s} y(s) - \frac{e^s (1 - e^{-s}) (a_0 e^s + a_1)}{s} \end{aligned}$$

其中用到  $Y(t) = a_0, 0 \leq t < 1$  及  $Y(t) = a_1, 1 \leq t < 2$ 。

4.18 令  $\{a_n\}, n=0,1,2,\dots$ , 代表常數  $a_0, a_1, a_2, \dots$  所形成之數列, 且假設數列滿足下列由差分方程式所定義的遞迴公式 (Recursion formula)

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \quad a_0 = 0, a_1 = 1$$

試求  $a_n$  (亦即解上述之差分方程式)。

圈 定義函數

$$Y(t) = a_n, \quad n \leq t < n+1 \quad \text{其中 } n=0,1,2,\dots$$

則原先之遞迴公式變為

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) + 6Y(t) = 0 \quad (1)$$

取(1)式之拉氏變換，並令  $a_0 = 0$ ， $a_1 = 1$  代入 17 題之結果，得

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})}{s} - 5e^sy(s) + 6y(s) = 0$$

即 
$$(e^{2s} - 5e^s + 6)y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } y(s) &= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^{2s}-5e^s+6)} = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s} \left\{ \frac{1}{(e^s-3)(e^s-2)} \right\} \\ &= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s} \left\{ \frac{1}{e^s-3} - \frac{1}{e^s-2} \right\} = \frac{1-e^{-s}}{s} \left\{ \frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}} \right\} \end{aligned}$$

再由 15 題，並取反拉氏變換，得

$$a_n = 3^n - 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

驗算：若  $a_n = 3^n - 2^n$ ，則  $a_0 = 0$ ， $a_1 = 1$ ，故

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n &= (3^{n+2} - 2^{n+2}) - 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) + 6(3^n - 2^n) \\ &= 9 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n - 15 \cdot 3^n + 10 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n - 6 \cdot 2^n = 0 \end{aligned}$$

#### 4.19 解下列差分方程式

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4^n, \quad a_0 = 0, a_1 = 1$$

答 此題和 18 題唯一不同點，乃是等號右邊多了  $4^n$ ，將原式寫為

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) + 6Y(t) = F(t) \quad (1)$$

其中  $Y(t) = a_n$ ， $F(t) = 4^n$  且  $n \leq t < n+1$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$

將(1)式兩邊各取拉氏變換，並利用 14，17 題之結果，可得（令  $y(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\}$ ）

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})}{s} - 5e^sy(s) + 6y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-4e^{-s})}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } y(s) &= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^s-2)(e^s-3)} + \frac{1-e^{-s}}{s(1-4e^{-s})} \\ &= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s} \left\{ \frac{1}{e^s-3} - \frac{1}{e^s-2} \right\} + \frac{e^s-1}{s(e^s-2)(e^s-3)(e^s-4)} \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s} \left\{ \frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}} \right\} + \frac{e^s-1}{s} \left\{ \frac{1/2}{e^s-2} - \frac{1}{e^s-3} + \frac{1/2}{e^s-4} \right\} \end{aligned}$$

187304-08

$$= \frac{1-e^{-s}}{s} \left\{ \frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}} \right\} + \frac{1-e^{-s}}{s} \left\{ \frac{1/2}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-3e^{-s}} + \frac{1/2}{1-4e^{-s}} \right\}$$

取反拉氏變換，並利用 15 題之結果，得

$$\begin{aligned} Y(t) = a_n &= 3^n - 2^n + \frac{1}{2} \cdot 2^n - 3^n + \frac{1}{2} \cdot 4^n \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n) \end{aligned} \quad (2)$$

4.20 在 19 題中，求  $a_5$ 。

答 解 1：由 19 題(2)式，可得

$$a_5 = \frac{1}{2}(4^5 - 2^5) = 496$$

解 2：將  $n=0$  代入 19 題所給之差分方程式，得

$$a_2 - 5a_1 + 6a_0 = 1$$

代入  $a_0=0$ ， $a_1=1$  得

$$a_2 = 1 + 5a_1 - 6a_0 = 6$$

若  $n=1$ ， $a_3 - 5a_2 + 6a_1 = 4$  故

$$a_3 = 4 + 5a_2 - 6a_1 = 28$$

若  $n=2$ ， $a_4 - 5a_3 + 6a_2 = 16$  故

$$a_4 = 16 + 5a_3 - 6a_2 = 16 + 5(28) - 6(6) = 120$$

最後若  $n=3$ ， $a_5 - 5a_4 + 6a_3 = 64$  故

$$a_5 = 64 + 5a_4 - 6a_3 = 64 + 5(120) - 6(28) = 496$$

## 其他各類問題

4.21 解下列積分方程式

$$Y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t + \int_0^t Y(u) Y(t-u) du$$

答 原式可寫成

$$Y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t + Y(t) * Y(t)$$

取拉氏變換，並利用褶積定理，得



$$y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \{y(s)\}^2 \quad \text{即} \quad \{y(s)\}^2 - y(s) + \frac{1}{s^2+4} = 0$$

解得

$$y(s) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{s^2+4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

故

$$y(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{s^2+4} + s}{\sqrt{s^2+4}} \right) \quad (1)$$

或

$$y(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{s^2+4} - s}{\sqrt{s^2+4}} \right) \quad (2)$$

由(2)式可得

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{s^2+4} - s}{\sqrt{s^2+4}} \right) \right\} = J_1(2t) \quad (3)$$

而(1)式可寫成

$$y(s) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{s^2+4} - s}{\sqrt{s^2+4}} - 2 \right) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{s^2+4} - s}{\sqrt{s^2+4}} \right)$$

故另一答案為

$$Y(t) = \delta(t) - J_1(2t) \quad (4)$$

其中  $\delta(t)$  為脈衝函數

(3)式之解答在  $t > 0$  時為連續且有界。

4.22 求  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  其中  $F(t) = n, n \leq t < n+1, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

圖如下

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \\ &= \int_0^1 e^{-st} (0) dt + \int_1^2 e^{-st} (1) dt + \int_2^3 e^{-st} (2) dt + \dots \\ &= (1) \left( \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} \right) + (2) \left( \frac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s} \right) + (3) \left( \frac{e^{-3s} - e^{-4s}}{s} \right) + \dots \\ &= \frac{e^{-s}(1 - e^{-s})}{s} (1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + 4e^{-3s} + \dots) \end{aligned}$$

當  $|x| < 1$  時，下式成立

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

微分後，可得

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

若  $x = e^{-s}$ ，則

$$1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + \cdots = \frac{1}{(1-e^{-s})^2}$$

故

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

4.23 在 (a)  $r \neq 1$ ，(b)  $r = 1$  時，分別求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$

圈 (a) 由二項式公式

$$\begin{aligned} \frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})} &= \frac{e^{-s}}{s}(1+re^{-s}+r^2e^{-2s}+\cdots) \\ &= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{re^{-2s}}{s} + \frac{r^2e^{-3s}}{s} + \cdots \\ &= u(t-1) + ru(t-2) + r^2u(t-3) + \cdots \end{aligned}$$

$$\text{故 } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = F(t) = \sum_{k=1}^{(t)} r^k \quad (1)$$

其中  $t \geq 1$ 。若  $t < 1$  時，原式爲零

若  $n \leq t < n+1$ ，且  $r \neq 1$  則(1)可化簡成

$$r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r(r^n-1)}{r-1} \quad (2)$$

(b) 若  $r = 1$ ，則  $F(t) = n$ ， $n \leq t < n+1$  此結果和 22 題一致。

4.24 解下列差分方程式

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 16n, \quad a_0 = 6, a_1 = 2$$

圈 原式可寫成

$$Y(t+2) - 7Y(t+1) + 10Y(t) = F(t) \quad (1)$$

其中  $Y(t) = a_n$ ， $F(t) = 16n$ ，且  $n \leq t < n+1$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$

利用 17 及 22 題，(1)式的拉氏變換爲

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})(6e^s+2)}{s} - 7e^s y(s) + \frac{42e^s(1-e^{-s})}{s} + 10y(s) = \frac{16e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

$$y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})(6e^s+2)}{s(e^s-5)(e^s-2)} - \frac{42e^s(1-e^{-s})}{s(e^s-5)(e^s-2)} + \frac{16e^{-s}}{s(1-e^{-s})(e^s-5)(e^s-2)}$$

$$= e^s \left( \frac{1-e^{-s}}{s} \right) \left\{ \frac{6e^s+2}{(e^s-5)(e^s-2)} \right\} \\ - 42 \left( \frac{1-e^{-s}}{s} \right) \left\{ \frac{e^s}{(e^s-5)(e^s-2)} \right\}$$

$$+ \frac{16}{s} \left\{ \frac{1}{(e^s-1)(e^s-5)(e^s-2)} \right\}$$

$$= e^s \left( \frac{1-e^{-s}}{s} \right) \left\{ \frac{32/3}{e^s-5} - \frac{14/3}{e^s-2} \right\}$$

$$- 42 \left( \frac{1-e^{-s}}{s} \right) \left\{ \frac{5/3}{e^s-5} - \frac{2/3}{e^s-2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{s} \left\{ \frac{4}{e^s-1} + \frac{4/3}{e^s-5} - \frac{16/3}{e^s-2} \right\}$$

$$= \left( \frac{1-e^{-s}}{s} \right) \left\{ \frac{32/3}{1-5e^{-s}} - \frac{14/3}{1-2e^{-s}} \right\}$$

$$- \left( \frac{1-e^{-s}}{s} \right) \left\{ \frac{70e^{-s}}{1-5e^{-s}} - \frac{28e^{-s}}{1-2e^{-s}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{s} \left\{ \frac{4e^{-s}}{1-e^{-s}} + \frac{(4/3)e^{-s}}{1-5e^{-s}} - \frac{(16/3)e^{-s}}{1-2e^{-s}} \right\}$$

再由 14 及 22 題，當  $n \geq 1$  時

$$a_n = \frac{32}{3} \cdot 5^n - \frac{14}{3} \cdot 2^n - 70 \cdot 5^{n-1} + 28 \cdot 2^{n-1} + 4(n-1) + \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} (5^n - 1) - \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{1} (2^n - 1) \\ = 4 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^n + 4n + 5$$

#### 4.25 將下列微分方程式

$$Y''(t) + \lambda Y(t) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(1) = 0$$

轉化成積分方程式（其中  $\lambda$  為常數）。

解 1：

令  $Y''(t) = V(t)$ ，若  $Y'(0) = c$ ，則

$$Y'(t) = \int_0^t V(u) du + c, \quad Y(t) = \int_0^t (t-u) V(u) du + ct \quad (1)$$

但  $Y(1) = 0$ ，故

$$\int_0^1 (1-u) V(u) du + c = 0 \quad \text{即} \quad c = -\int_0^1 (u-1) V(u) du$$

再由(1)式，可得

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t (t-u) V(u) du + \int_0^1 (tu-t) V(u) du \\ &= \int_0^t (t-u) V(u) du + \int_0^t (tu-t) V(u) du + \int_t^1 (tu-t) V(u) du \\ &= \int_0^t (t-1)u V(u) du + \int_t^1 (u-1)t V(u) du \end{aligned}$$

上式可寫成 
$$Y(t) = \int_0^1 K(t, u) V(u) du$$

其中  $K(t, u) = \begin{cases} (t-1)u & u < t \\ (u-1)t & u > t \end{cases}$ 。 [ 注意到  $K(t, u) = K(u, t)$ ，亦即  $K(t, u)$  是對稱的 (Symmetric) ]。

$u$  ) 是對稱的 (Symmetric)。

故所求之積分方程式為

$$V(t) + \lambda \int_0^1 K(t, u) V(u) du = 0$$

即 
$$V(t) = -\lambda \int_0^1 K(t, u) V(u) du$$

解 2 :

將所給之微分方程式自 0 至  $t$  積分，得

$$Y'(t) - Y'(0) + \lambda \int_0^t Y(u) du = 0$$

再一次自 0 至  $t$  積分之，得

$$Y(t) - Y(0) - Y'(0)t + \lambda \int_0^t (t-u) Y(u) du = 0 \quad (1)$$

但  $Y(0) = 0$ ，故(1)式變為

1037304-8 B9

$$Y(t) = Y'(0)t - \lambda \int_0^t (t-u) Y(u) du \quad (2)$$

令  $t = 1$  代入(2)式，並利用  $Y(1) = 0$ ，得

$$Y'(0) = \lambda \int_0^1 (1-u) Y(u) du$$

故(2)式可寫成

$$\begin{aligned} Y(t) &= \lambda \int_0^1 (t-tu) Y(u) du - \lambda \int_0^t (t-u) Y(u) du \\ &= \lambda \int_0^t (t-tu) Y(u) du + \lambda \int_t^1 (t-tu) Y(u) du - \lambda \int_0^t (t-u) Y(u) du \\ &= \lambda \int_0^t u(1-t) Y(u) du + \lambda \int_t^1 t(1-u) Y(u) du \\ &= -\lambda \int_0^1 K(t, u) Y(u) du \end{aligned}$$

$$\text{其中 } K(t, u) = \begin{cases} (t-1)u & u < t \\ (u-1)t & u > t \end{cases}$$

在此所求得之積分方程式，即為具有對稱核的佛瑞德哈姆積分方程式的一例。

### 補充題

#### 積分方程式

將下列各微分方程式轉化成積分方程式

4.26  $Y''(t) + 2Y'(t) - 8Y(t) = 5t^2 - 3t, \quad Y(0) = -2, \quad Y'(0) = 3.$

答  $V(t) + \int_0^t (2 - 8t + 8u) V(u) du = 5t^2 + 21t - 22, \quad V(t) = Y''(t)$

或  $Y(t) + \int_0^t (2 - 8t + 8u) Y(u) du = -2 - t + 5t^4/12 - t^3$

4.27  $2Y''(t) - 3Y'(t) - 2Y(t) = 4e^{-t} + 2\cos t, \quad Y(0) = 4, \quad Y'(0) = -1.$

答  $2V(t) + \int_0^t (2u - 2t - 3) V(u) du = 4e^{-t} + 2\cos t + 5 - 2t, \quad V(t) = Y''(t)$

或  $2Y(t) + \int_0^t (2u - 2t - 3) Y(u) du = 6 - 10t + 4e^{-t} - 2\cos t$

4.28  $Y'''(t) + 8Y(t) = 3\sin t + 2\cos t, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = -1, \quad Y''(0) = 2.$

答

$$V(t) + 4 \int_0^t (t-u)^2 V(u) du = 3 \sin t + 2 \cos t - 4t^2 + 4t, \quad V(t) = Y'(t)$$

$$\text{或 } Y(t) + 4 \int_0^t (t-u)^2 Y(u) du = 5t^2/2 + t - 3 + 3 \cos t - 2 \sin t$$

$$4.29 \quad Y''(t) + \cos t Y(t) = e^{-t}, \quad Y(0) = -2, \quad Y'(0) = 0.$$

$$\text{答 } V(t) + \int_0^t (t-u) \cos t V(u) du = e^{-t} + 2 \cos t, \quad V(t) = Y''(t)$$

$$\text{或 } Y(t) + \int_0^t (t-u) \cos u Y(u) du = t - 3 + e^{-t}$$

$$4.30 \quad Y''(t) - t Y'(t) + t^2 Y(t) = 1 + t, \quad Y(0) = 4, \quad Y'(0) = 2.$$

$$\text{答 } V(t) + \int_0^t (t^3 - t - ut^2) V(u) du = 1 + 3t - 4t^2 - 2t^3, \quad V(t) = Y''(t)$$

$$\text{或 } Y(t) - \int_0^t (t - 2u + tu^2 - u^3) Y(u) du = t^2/2 + t^3/6 + 2t + 4$$

$$4.31 \quad Y^{IV}(t) - 2t Y'''(t) + (1 - t^2) Y(t) = 1 + 4t - 2t^3 + t^4, \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = 0, \quad Y''(0) = -2, \quad Y'''(0) = 0.$$

$$\text{答 } V(t) + \int_0^t \left\{ \frac{1}{6}(t-u)^3(1-t^2) - 2t(t-u) \right\} V(u) du = 0, \quad V(t) = Y^{IV}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{或 } Y(t) - \int_0^t \{ 2u(t-u) + 2(t-u)^2 + \frac{1}{6}(t-u)^3(1-u^2) \} Y(u) du \\ = 1 - t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^5}{180} + \frac{t^6}{1680} \end{aligned}$$

將下列各積分方程式轉化成微分方程式及相關的條件。

$$4.32 \quad Y(t) = 5 \cos t + \int_0^t (t-u) Y(u) du$$

$$\text{答 } Y''(t) - Y(t) = -5 \sin t, \quad Y(0) = 5, \quad Y'(0) = 0$$

$$4.33 \quad Y(t) = t^2 - 3t + 4 - 3 \int_0^t (t-u)^2 Y(u) du$$

$$\text{答 } Y'''(t) + 6Y(t) = 0, \quad Y(0) = 4, \quad Y'(0) = -3, \quad Y''(0) = 2$$

$$4.34 \quad Y(t) + \int_0^t \{ (t-u)^2 + 4(t-u) - 3 \} Y(u) du = e^{-t}$$

$$\text{答 } Y'''(t) - 3Y''(t) + 4Y'(t) + 2Y(t) = -e^{-t}, \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = 2, \quad Y''(0) = 3$$

$$4.35 \quad Y(t) - \int_0^t (t-u) \sec t Y(u) du = t$$

$$\text{答 } Y''(t) - 2 \tan t Y'(t) - (1 + \sec t) Y(t) = -t - 2 \tan t, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1$$

$$4.36 \quad Y(t) + \int_0^t (t^2 + 4t - ut - u - 2) Y(u) du = 0$$

答  $Y'''(t) + (3t-2)Y''(t) + (t+10)Y'(t) + Y(t) = 0, \quad Y(0) = 0, Y'(0) = 0, Y''(0) = 0$

## 褶積型的積分方程式

4.37 解  $Y(t) = t + 2 \int_0^t \cos(t-u) Y(u) du.$

答  $Y(t) = t + 2 + 2(t-1)e^t$

4.38 (a) 證明下列積分方程式

$$Y(t) = t + \frac{1}{t} \int_0^t (t-u)^3 Y(u) du$$

之解為  $Y(t) = \frac{1}{2}(\sin t + \sinh t).$

(b) (a)之解是否為唯一？解釋之。

4.39 求積分方程式  $\int_0^t Y(u) Y(t-u) du = 2Y(t) + t - 2.$  的連續解 (Continuous Solution)。

答  $Y(t) = 1$

4.40 證明積分方程式  $\int_0^t Y(u) \sin(t-u) du = Y(t)$  的唯一解為顯明解 (Trivial Solution)

$Y(t) = 0.$

4.41 討論積分方程式  $\int_0^t Y(u) G(t-u) du = Y(t).$  的解。

## 阿貝爾積分方程式及等時問題

4.42 解積分方程式  $\int_0^t \frac{Y(u)}{\sqrt{t-u}} du = \sqrt{t}.$  答  $Y(t) = \frac{1}{2}$

4.43 證明積分方程式  $\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{1/3}} du = t(1+t)$  之解為  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} t^{1/3} (3t+2).$

4.44 一半徑為  $a$  之圓輪 (見圖 4-3) 沿一直線 (設為  $x$  軸) 滾動。證明其邊緣上一點  $O'$  (原先和原點  $O$  重合) 之軌跡為一擺線

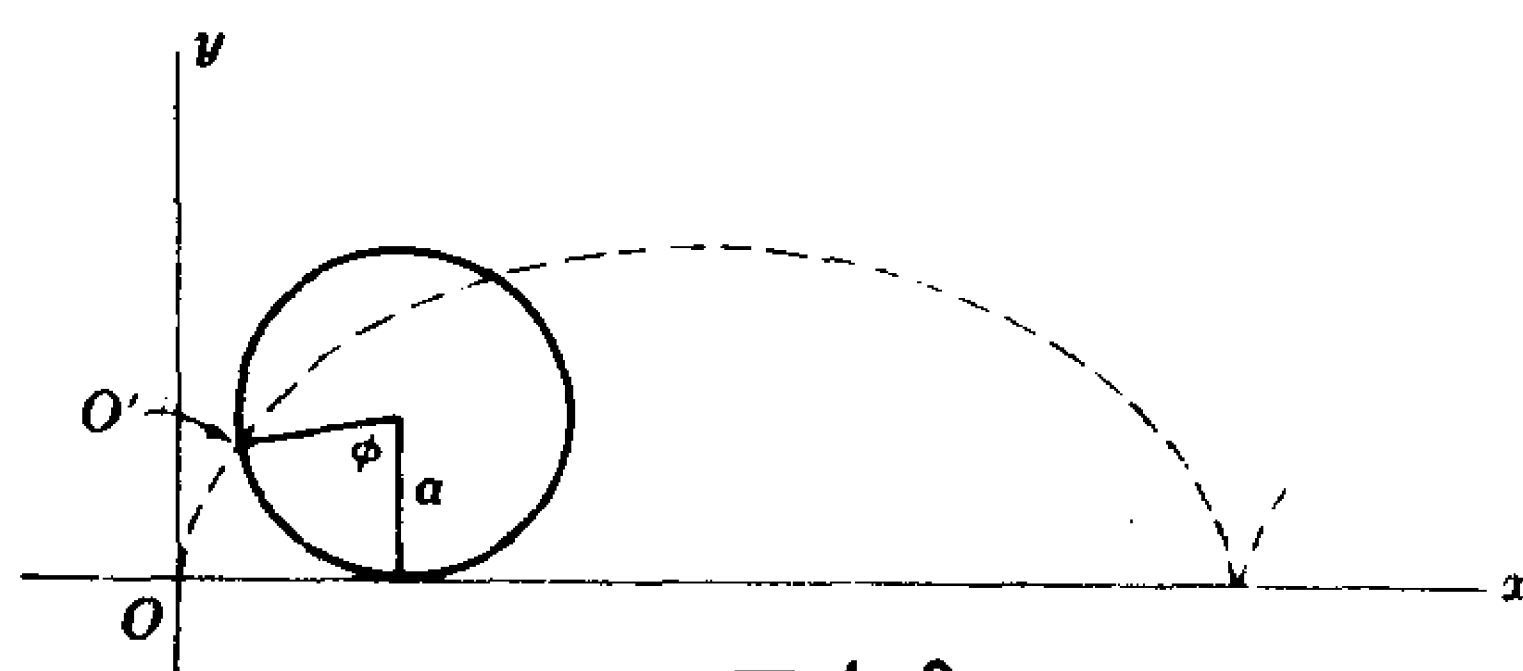


圖 4-3

$$x = a(\phi - \sin \phi), \quad y = a(1 - \cos \phi)$$

如圖 4-3 中的虛線所示。

4.45 證明第 8 題的等時問題中提到的曲線，即為擺線，並討論此曲線和第 4.4 問的曲線有何關連。

4.46 證明在第 8 及第 9 題中，珠子自最高點  $P$  滑至最低點  $O$ （擺線的最低點）所需之時間為  $\pi \sqrt{a/g}$ 。

4.47 若  $0 < \alpha < 1$ ，證明  $\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^\alpha} du = F(t)$ （假設  $F(0) = 0$ ）之解為

$$Y(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^t F'(u) (t-u)^{\alpha-1} du$$

4.48 若  $F(0) \neq 0$ ，討論第 47 題積分方程式的解。考慮下式，並由此發表你的評論。

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{1/2}} du = 1 + t$$

### 積微分方程式

4.49 解  $\int_0^t Y(u) \cos(t-u) du = Y'(t)$ ，已知  $Y(0) = 1$ 。

答  $Y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$

4.50 解  $\int_0^t Y'(u) Y(t-u) du = 24t^3$ ，已知  $Y(0) = 0$ 。

答  $Y(t) = \pm 16^{3/2} \sqrt{t}$

4.51 (a) 證明第 49 題的積分方程式可改寫成以下的積分方程式

$$1 + \int_0^t (t-u) Y(u) \cos(t-u) du = Y(t)$$

(b) 解(a)中的積分方程式。

4.52 解  $\int_0^t Y''(u) Y'(t-u) du = Y'(t) - Y(t)$ ，已知  $Y(0) = Y'(0) = 0$ 。

答  $Y(t) = 0$



## 差分及微分差分方程式

4.53 解  $Y(t) - 3Y(t-1) + 2Y(t-2) = 1$  其中  $Y(t) = 0, t < 0$ .

答  $Y(t) = 2^{[t]+2} - [t] - 3$

4.54 證明  $Y'(t) = 2Y(t-1) + t$  (但當  $t < 0$  時,  $Y(t) = 0$ ) 之解為

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{[t]} \frac{2^n(t-n)^{n+2}}{(n+2)!}$$

4.55 解  $Y''(t) - Y(t-1) = F(t)$  其中當  $t < 0$  時  $Y(t) = 0, Y'(t) = 0$ , 且

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t & t > 0 \end{cases}$$

答  $Y(t) = 2 \sum_{n=0}^{[t]} \frac{(t-n)^{2n+3}}{(2n+3)!}$

4.56 解  $3Y(t) - 5Y(t-1) + 2Y(t-2) = F(t)$  但當  $t < 0$  時  $Y(t) = 0$ , 且

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & t > 0 \end{cases}$$

答  $Y(t) = \sum_{n=0}^{[t]} \{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}\}(t-n)^2$

4.57 解下列各差分方程式

(a)  $3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$ , 已知  $a_0 = 1, a_1 = 0$ .

(b)  $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 0$ , 已知  $a_0 = 0, a_1 = 1$ .

答 (a)  $3(2/3)^n - 2$ , (b)  $\frac{1}{4}\{1 - (-3)^n\}$

4.58 費布那希數字 (Fibonacci numbers) 乃由下式所定義:  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ , 其中  $a_0 = 0, a_1 = 1$ . (a) 求出前十個費布那希數字, (b) 找出  $a_n$  的公式。

答 (a) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 (b)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$

4.59 解下列方程式  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$  其中  $a_0 = 1, a_1 = 4$ . 圖.  $a_n = 2^n(n+1)$

4.60 解下列方程式  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$  其中  $a_0 = 0, a_1 = 1$ .

答  $a_n = \{(1+i)^n - (1-i)^n\}/2i$

4.61 (a) 解  $a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = 0$  已知  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1$ . (b) 求  $a_{10}$

答 (a)  $a_n = \frac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}$ , (b)  $a_{10} = 341$

- 4.62 (a) 令  $a_n = r^n$  ( $r$  為未知常數), 指出如何藉此以求  $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0$  之解。  
 (b) 利用此法去解 57 ~ 61 題。

### 其他各類問題

4.63 證明以下之非線性微分方程式

$$Y''(t) + \{Y(t)\}^2 = t \sin t, \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = -1$$

可寫成積分方程式為

$$Y(t) + \int_0^t (t-u) \{Y(u)\}^2 du = 3 - t - 2 \cos t - t \sin t$$

4.64 解  $\int_0^t Y(u) Y(t-u) du = 2Y(t) + \frac{1}{2}t^2 - 2t$ .

圖  $Y(t) = t$  即  $Y(t) = 2\delta(t) - t$

4.65 將下式轉化成積分方程式  $Y''(t) - Y(t) = 3 \cos t - \sin t$ ,  $Y(\pi) = 1$ ,  $Y'(\pi) = -2$ .

圖  $V(t) = 2\pi + 1 - 2t + 3 \cos t - \sin t + \int_{\pi}^t (t-u) V(u) du$ , 其中  $V(t) = Y''(t)$

4.66 解  $Y(t) = t + \int_0^t Y(u) J_1(t-u) du$ .

圖  $Y(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1) \int_0^t J_0(u) du + \frac{1}{2}t J_0(t) - \frac{1}{2}t^2 J_1(t)$

4.67 求  $G(x)$  使其滿足  $\int_0^x G(u) G(x-u) du = 8(\sin x - x \cos x)$ .

圖  $G(x) = \pm 4 \sin x$

4.68 解  $\int_0^t Y(u) Y(t-u) du = t + 2Y(t)$ .

圖  $Y(t) = J_1(t) - \int_0^t J_0(u) du$  即  $Y(t) = 2\delta(t) - J_1(t) + \int_0^t J_0(u) du$

4.69 利用拉氏變換, 解下列各差分方程式

(a)  $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2n + 1$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ .

(b)  $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 24n - 8$ ,  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = -5$ .

圖 (a)  $a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + n + \frac{5}{2}$  (b)  $a_n = 2n^2 - 4n + 2 + (-5)^n$

#### 164 第四章 積分及差分方程式方面的應用

4.70 解 (a)  $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = n + 2$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$ .

(b)  $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = 2^n$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$ .

答 (a)  $a_n = \frac{1}{4}(3n-1)(-1)^n + \frac{1}{4}(n+1)$  (b)  $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cdot 5^n - \frac{1}{8} \cdot 2^n$

4.71 解  $a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = n^2 + 2^n$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ .

答  $a_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{6}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{6}n \cdot 2^n - \frac{2}{9} \cdot 2^n - \frac{1}{9}(-1)^n$

4.72 (a) 藉著假設  $a_n = A + B_n$  ( $A, B$  均為未知常數), 說明如何求出 69 題(a)的特解。(b) 利用(a)之結果, 再加上 62 題的方法, 試說明如果求出 69 題(a)的答案。(c)如何修正(a), (b)部份的方法, 藉以求得 69 題(b), 70 題(a), 70 題(b)及 71 題的解。

4.73 求所有的連續函數  $F(t)$ , 使其滿足  $\int_0^t u F(u) \cos(t-u) du = te^{-t} - \sin t$ .

答  $F(t) = -2e^{-t}$

4.74 證明非線性微分方程式

$$Y''(t) + 2Y'(t) = Y^3(t), \quad Y(0) = 0, \quad Y(1) = 0$$

可改寫積分方程式如下:

$$Y(t) = \int_0^t (2t-2) Y(u) du + \int_t^1 2t Y(u) du + \int_0^1 K(t, u) Y^3(u) du$$

$$\text{即 } Y(t) = \int_0^t (2-2t)e^{2(u-t)} Y(u) du - \int_t^1 2te^{2(u-t)} Y(u) du + \int_0^1 e^{-2t} K(t, u) Y^3(u) du$$

$$\text{其中 } K(t, u) = \begin{cases} u(t-1) & u < t \\ t(u-1) & u > t \end{cases}$$

4.75 試求  $Y(t)$ :  $8Y(t) - 12Y(t-1) + 4Y(t-2) = F(t)$  其中當  $t < 0$  時,  $Y(t) = 0$ , 且

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

$$\text{答 } Y(t) = \frac{1}{8}e^{-t} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (2-2^{-n})e^n \right\}$$

4.76 若  $Y_n'(t) = \beta \{Y_{n-1}(t) - Y_n(t)\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$$Y_0'(t) = -\beta Y_0(t)$$

其中當  $n = 1, 2, 3, \dots$  時,  $Y_n(0) = 1$ , 且  $Y_0(0) = 1$ ,  $\beta$  為一常數, 試求  $Y_n(t)$ 。

$$\text{答 } Y_n(t) = \frac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!}$$

4.77 若 76 題之第一條等式改為下式，試重做之。

$$Y_n'(t) = \beta_n \{Y_{n-1}(t) - Y_n(t)\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

其中  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  均為常數。

4.78 直接證明擺線的等時性質 (Tautochrone property)。

4.79 捷線問題 (Brachistochrone problem) 乃是在求一落於垂直平面之無摩擦鐵線的形狀 (如圖 4-1 所示)，而此形狀必須使玻璃珠在最短時間內能由  $P$  滑至  $O$ 。此問題之解答為擺線 (如圖 4-2 所示)。在以下之特例中，驗證此性質 (a) 一直線及 (b) 一拋物線連接  $P$  及  $Q$ 。

4.80 試求一落於垂直平面之無摩擦鐵線之形狀，此形狀必須使得玻璃珠由  $P$  點滑至最低點的時間，正比於  $P$  點相對於最低點之座標的垂直分量。

答  $x = a(1 - \cos^3 \theta)$ ,  $y = \frac{3}{2} a \sin^2 \theta$



# 第五章

## 複變理論

### 5-1 複數係

因爲沒有實數  $x$  可以滿足方程式  $x^2 + 1 = 0$  (或其他類似的方程式)，所以要引進複數的觀念。

複數的型式爲  $a + bi$ ，其中  $a, b$  均爲實數，分別稱爲實部 (Real part) 及虛部 (Imaginary part)，且  $i = \sqrt{-1}$  稱爲虛數單位 (Imaginary unit)。兩個複數  $a + bi$  及  $c + di$  爲相等 (Equal) 若且唯若  $a = c$  且  $b = d$ 。我們可將實數視爲當  $b = 0$  時，所有複數所成的集合。複數  $0 + 0i$  即對應於實數 0。

$a + bi$  的絕對值 (Absolute value) 或模數 (Modulus) 定義爲  $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。 $a + bi$  的共軛複數 (Complex conjugate) 定義爲  $a - bi$ 。複數  $Z$  的共軛複數通常寫爲  $\bar{Z}$  或  $Z^*$ 。

在進行複數的各項運算時，可說和實數的代數相同，只不過在  $i^2$  出現時，我們就以  $-1$  代之。但我們並未定義複數的不等關係。

就複數的公理基礎 (Axiomatic foundation) 方面來看，可將複數視爲實數  $a, b$  的有序對  $(a, b)$ ，且此有序對的運算規則和上一段所提到的複數運算是等價的。例如，我們定理  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ， $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ ， $m(a, b) = (ma, mb)$  等等。由此可將  $a + bi$  表示爲  $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ ，其中  $i$  則代表  $(0, 1)$ 。

### 5-2 複數的極式

若在相互垂直的兩軸  $X'OX$  及  $Y'OY$  ( $x$  及  $y$  軸) 選取實數刻度，則我們可由有序對  $(x, y)$  (稱爲此點的直角座標，Rectangular coordinates) 來決定平面上任一點。參見圖 5-1 中， $P, Q, R, S$  及  $T$  各點的座標及位置。

由於複數  $x + iy$  可視爲有序對  $(x, y)$ ，所以我們可在  $xy$  平面稱複數平面 (Complex plane) 或阿干圖形 (Argand diagram) 找到對應於複數的一點。參見圖 5-2，可知

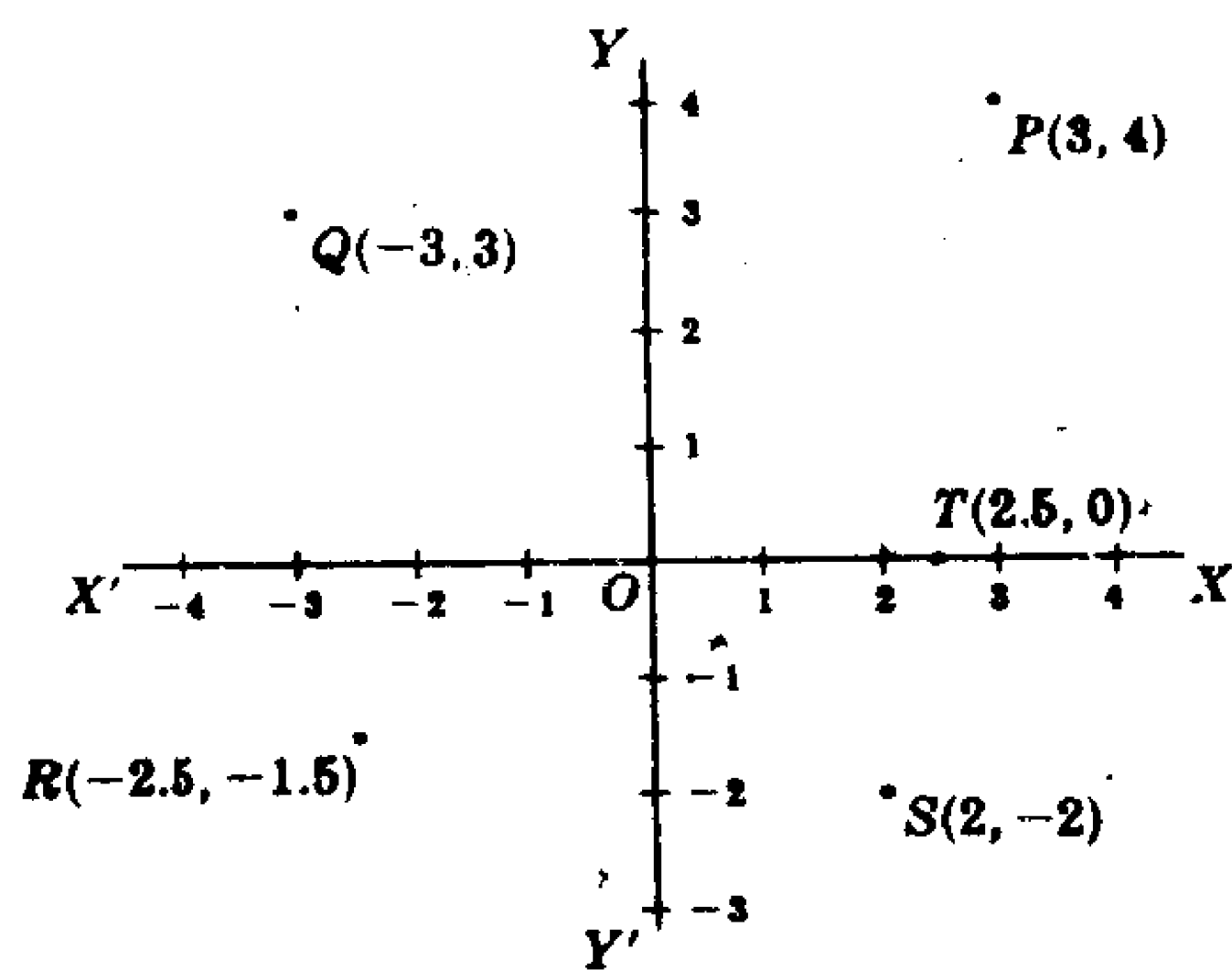


圖 5-1

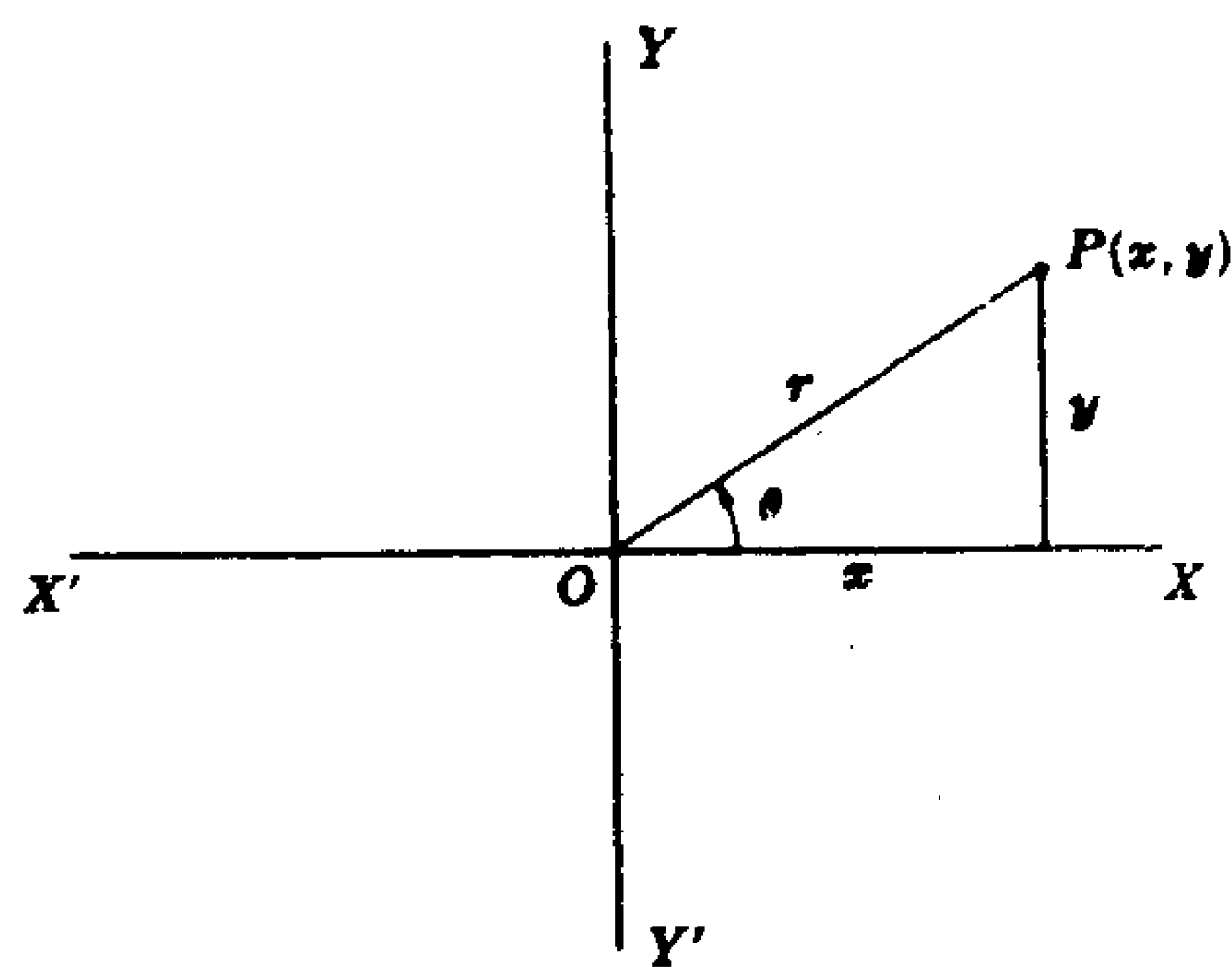


圖 5-2

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ ，而  $\theta$  稱為輻角 (Amplitude or argument) 乃是  $OP$  與正  $x$  軸  $OX$  所夾之角。故

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2)$$

稱為複數的極式 (Polar form)，其中  $r$ ， $\theta$  稱為極座標 (Polar coordinates)。爲了方便起見，有時以  $\text{cis } \theta$  代替  $\cos \theta + i \sin \theta$ 。

### 5.3 極式的運算，棣馬弗定理

若  $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  且  $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ，則我們可證明下列各式：

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\} \quad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\} \quad (4)$$

$$z^n = \{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (5)$$

其中  $n$  爲任意實數。(5)式通常稱為棣馬弗定理 (De Moivre's theorem)。

由奧衣勒公式 (Euler's formula)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

我們可將(3)，(4)及(5)寫成更具啓發性的形式

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (6)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (7)$$

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad (8)$$

## 5.4 複數的根

若  $n$  為正整數，則由棣馬弗定理可得

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^{1/n} \\ &= r^{1/n} \left\{ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right\} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

或寫成

$$z^{1/n} = (r e^{i\theta})^{1/n} = \{r e^{i(\theta + 2k\pi)}\}^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \quad (10)$$

由上可知  $z^{1/n}$  ( $z \neq 0$ ) 有  $n$  個不同值。以上結論可輕易地推廣至  $z^{m/n}$ 。

## 5.5 函數

若對一複數集合中的任一元素  $z$  而言，對應有單值或多值的複數  $w$ ，則  $w$  稱為複數  $z$  的函數 (Function of the complex variable  $z$ )，寫成  $w = f(z)$ 。

若對每一  $z$  值而言，只有單一之  $w$  值與之對應，則此函數為單值 (Single-valued)，否則就是多重值 (Multiple-valued) 或多值 (Many-valued)。一般而言，我們可寫成  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ，其中  $u, v$  均為  $x, y$  的實變函數。

### 例題 5.1

$w = z^2 = (x + i y)^2 = x^2 - y^2 + 2 i x y = u + i v$ ，故  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ， $v(x, y) = 2 x y$ ；分別稱為  $w = z^2$  的實部 (Real part) 和虛部 (Imaginary part)。

除非另有說明，否則我們均假定  $f(z)$  為單值。多重值的函數可視為多個單值函數的集合。

## 5.6 極限及連續性

複數的極限及連續性的定義，都和實數類似。故若給定任意  $\epsilon > 0$ ，則存在一  $\delta > 0$ ，使得當  $0 < |z - z_0| < \delta$  時，必有  $|f(z) - l| < \epsilon$ ，此即為“當  $z$  逼近於  $z_0$  時， $f(z)$  之極限值為  $l$ ”。

同理，給定任意  $\epsilon > 0$ ，則存在一  $\delta > 0$ ，使得當  $|z - z_0| < \delta$  時，必有  $|f(z) - l| < \epsilon$ 。



$|f(z_0) - f(z)| < \epsilon$ ，此即為“ $f(z)$ 在 $z_0$ 連續”。另一方面來說，若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ，則 $f(z)$ 即在 $z_0$ 連續。

### 5.7 導式

若 $f(z)$ 在 $z$ 平面上的某些區域為單值，則 $f(z)$ 的導式(Derivative)，記為 $f'(z)$ ，其定義為

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (11)$$

但須假定極限的存在和 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式無關。若在 $z = z_0$ 時，(11)式之極限值存在，則稱 $f(z)$ 在 $z_0$ 為可微(Differentiable at  $z_0$ )。若對所有滿足 $|z - z_0| < \delta$  ( $\delta > 0$ )的 $z$ 而言，(11)式的極限值均存在，則稱 $f(z)$ 在 $z_0$ 為可解析(A analytic at  $z_0$ )。若對區域 $R$ 中的所有 $z$ 而言，極限值均存在，則稱 $f(z)$ 在 $R$ 為可解析(A analytic in  $R$ )。若 $f(z)$ 為可解析(A analytic)，則 $f(z)$ 必為單值且連續，但反之則不一定為真。

複數的基本函數，乃是由相對應的實數基本函數所延伸而得。若實變函數 $f(x)$ 的級數展開存在，我們即可將級數中的 $x$ 以 $z$ 代之，並將此等式視為定義用之。

#### 例題 5.2

定義  $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ ,  $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$ ,  $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$ ，由此我們可證明  $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ ，其他關係式亦可由此導出。

#### 例題 5.3

我們將 $a^b$ 定義為 $e^{b \ln a}$ ，其中 $a, b$ 可為複數。因 $e^{2k\pi i} = 1$ ，故 $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$ 且我們定義 $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$ ，由此可知 $\ln z$ 為多值函數。此值函數乃是由不同的單值函數所構成，這些單值函數均稱為原函數的分枝(Branch)。

複數函數的微分規則和實數是完全相同的，例  $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$ ,  $\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$ ，等等。

## 5.8 柯西—里曼方程式

函數  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  在  $\mathcal{R}$  內為可解析的必要條件為  $u, v$  均需滿足下列之柯西—里曼方程式 (Cauchy-Riemann equations) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (12)$$

(參見第 12 題)。若 (12) 式之偏微分在  $\mathcal{R}$  中連續，則此方程式即為  $f(z)$  在  $\mathcal{R}$  內為可解析的充分條件。

若  $u, v$  對  $x, y$  的二次導式均存在且連續，則將 (12) 式微分後可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

故實部及虛部均滿足二維的拉卜拉士方程式 (Laplace's equation)。滿足拉卜拉士方程式的函數，我們稱為諧和函數 (Harmonic functions)。

## 5.9 線積分

令  $C$  為  $xy$  平面上，連接  $(x_1, y_1)$  及  $(x_2, y_2)$  的曲線，以下積分式

$$\int_C P dx + Q dy \quad \text{或} \quad \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy$$

(其中  $P, Q$  均為  $x, y$  的函數) 稱為沿曲線  $C$  的線積分 (Line integral)。這是在基本微積分中，對積分的推廣。就如同在基本微積分中，線積分也可定義為和的極限。

線積分的重要性質為

$$1. \quad \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy = - \int_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy$$

2. 若  $(x_3, y_3)$  在曲線  $C$  上之任意第三點，則

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_3, y_3)} P dx + Q dy + \int_{(x_3, y_3)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy$$

若  $C$  為簡單封閉曲線 (Simple closed curve) (即不和本身交叉的曲線)，如圖 5-3 所示，則繞著 (反時鐘方向，即正方向) 曲線  $C$  的積分式寫為

$$\oint_C P dx + Q dy$$

線積分的計算，參見第15題。

### 5.10 平面上的革忍定理

$C$  為簡單封閉曲線，所包住的區域為  $\mathcal{R}$  (見圖 5-3)。假設在  $\mathcal{R}$  和  $C$  上， $P$ ， $Q$  及其對  $x$ ， $y$  的一次偏微分均連續，則

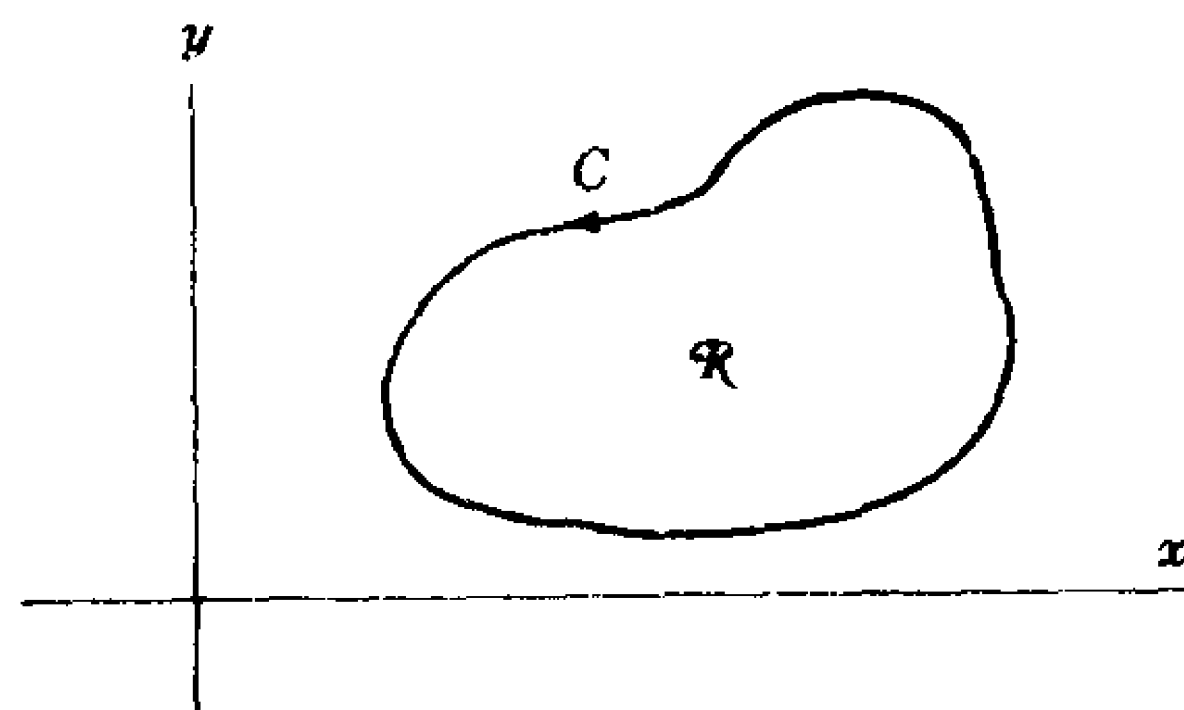


圖 5-3

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

上式通常稱為平面上的革忍定理 (Green's theorem in the plane)。

### 5.11 積 分

若  $f(z)$  在區域  $\mathcal{R}$  中為完全定義、單值及連續，我們定義  $f(z)$  沿  $\mathcal{R}$  中之某路徑  $C$ ，自  $z_1$  至  $z_2$  (其中  $z_1 = x_1 + iy_1$ ， $z_2 = x_2 + iy_2$ ) 之積分 (Integral) 為

$$\int_C f(z) dz = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (u + iv)(dx + i dy) = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} u dx - v dy + i \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} v dx + u dy$$

由此定義可看出，複變函數的積分是隨線積分而定的。另一定義乃利用實變函數，再取和的極限，其最後結果和上式是等價的。

複數的積分規則和實數相同，一重要結果為

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq M \int_C ds = ML \quad (14)$$

其中  $M$  為  $|f(z)|$  在  $C$  中的上界，即  $|f(z)| \leq M$ ，而  $L$  為路徑  $C$  的長度。

### 5.12 柯西定理

$C$  為簡單封閉曲線，若  $f(z)$  在  $C$  上及其所包圍之區域內均為可解析，則我們有柯西定理 (Cauchy's theorem) 如下：

118301-8  
A2

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (15)$$

可參見第 19 題。

以另一方式表之，(15) 式和下列敘述是等價的，即  $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$  之值和連接  $z_1, z_2$  之路徑無關。因此此類積分可由  $F(z_2) - F(z_1)$  計算得之，其中  $F'(z) = f(z)$ 。

#### 例題 5.4

因  $f(z) = 2z$  在任何點均為可解析，故對任意簡單封閉曲線  $C$  有

$$\oint_C 2z dz = 0$$

又 
$$\int_{2i}^{1+i} 2z dz = z^2 \Big|_{2i}^{1+i} = (1+i)^2 - (2i)^2 = 2i + 4$$

### 5.13 柯西積分公式

若  $f(z)$  在簡單封閉曲線  $C$  上及其內之區域均為可解析，而  $a$  為  $C$  內任意一點，則

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (16)$$

其中積分方向為沿  $C$  的正（即反時鐘）方向。

而  $f(z)$  在  $z=a$  的  $n$  次導式為

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (17)$$

這些均稱為柯西積分公式 (Cauchy's integral formula)。這些公式非常出色，因它表示：若  $f(z)$  在  $C$  上之值已知，則  $f(z)$  及其導式在  $C$  內之值均可計算出。同理它也指出，若一複變函數之一次導式存在，則其任意高次導式均存在。這在實變函數中就不一定成立。

### 5.14 泰勒級數

令  $f(z)$  在以  $z=a$  為圓心的圓上及圓內均為可解析，則對圓內的所有點  $z$ ，我們可將  $f(z)$  表為泰勒級數 (Taylor's series) 如下：

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \dots \quad (18)$$

參見第 29 題。

### 5.15 奇 點

若  $f(z)$  在某一點  $z$  爲不可解析，則此點稱爲奇點 (Singular point)。若  $f(z)$  在某區域，除了內部一點  $z = a$  外，其餘均爲可解析，則我們稱  $z = a$  爲  $f(z)$  的孤立奇點 (Isolated singularity)。

#### 例題 5.5

若  $f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$ ，則  $z = 3$  爲  $f(z)$  的孤立奇點。

### 5.16 極 點

若  $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^n}$ ， $\phi(a) \neq 0$ ，其中  $\phi(z)$  在任意點 (含  $z = a$ ) 均爲可解析，且  $n$  爲正整數，則  $f(z)$  的孤立奇點爲  $z = a$ ，或稱爲  $n$  階級點 (Pole of order  $n$ )。若  $n = 1$ ，則稱單極點 (Simple pole)；若  $n = 2$ ，則稱雙重極點 (Double pole)，以下類推。

#### 例題 5.6

$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$  有兩個奇點，一 2 階極點或雙重極點在  $z = 3$ ，另一 1 階極點或單極點在  $z = -1$ 。

#### 例題 5.7

$f(z) = \frac{3z-1}{z^2+4} = \frac{3z-1}{(z+2i)(z-2i)}$  有兩個單極點在  $z = \pm 2i$ 。

除了極點之外，函數還具有其他形式的奇點。例如， $f(z) = \sqrt{z}$  在  $z = 0$  處爲分枝點 (Branch point) (見 45 題)。函數  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  有一奇點在  $z = 0$ ，然而，

因爲  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$  並非無限大，我們稱此奇點爲可去奇點 (Removable singularity)。

### 5.17 洛冉級數

若  $f(z)$  在  $z = a$  有一  $n$  階極點，但在以  $z = a$  為圓心的圓  $C$  內均為可解析，則  $(z-a)^n f(z)$  在圓  $C$  上及其內部任一點均為可解析，且在  $z = a$  具有泰勒級數，故

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \quad (19)$$

此稱為  $f(z)$  的洛冉級數 (Laurent's series)。其中  $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$  稱為解析部分 (Analytic part)，而其他包含  $z-a$  之負次項，稱為主要部分 (Principal part)。一般而言，若級數  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k$  為洛冉級數，其中  $k < 0$  的項構成主要部份。若一函數在兩同心圓 (圓心為  $z = a$ ) 之間為可解析，則此函數即可展開成洛冉級數 (參見 119 題)。

由函數  $f(z)$  展開之洛冉級數，可定義出此函數之不同型態之奇點。例如當某個洛冉級數之主要部分為有限項，亦即  $a_{-n} \neq 0$ ，但  $a_{-n-1}, a_{-n-2}$  均為零，則  $z = a$  為  $n$  階極點。若主要部份具有無限多的非零項，則  $z = a$  稱為本性奇點 (Essential singularity) 或無限階極點 (Pole of infinite order)。

#### 例題 5.8

函數  $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots$  在  $z = 0$  為本性奇點。

### 5.18 留數

(19) 式中的各項係數可由  $(z-a)^n f(z)$  的泰勒級數求得。在更進一步的探討，可知  $a_{-1}$  (稱為  $f(z)$  在極點  $z = a$  的留數, Residue) 此係數非常重要，它可由下列公式求得

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \quad (20)$$

其中  $n$  是極點的階數。若  $z = a$  為單極點，則留數的計算即非常容易，如下

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) \quad (21)$$

### 5.19 留數定理

設  $f(z)$  在區域  $\mathcal{R}$  中，除了有  $-n$  階極點在  $z = a$  之外，其餘各點均為可解析。若  $C$  為包含  $z = a$  的任意簡單封閉曲線，則  $f(z)$  可展開(19)式的型式。將(19)式積分，並代入下列恒等式

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{if } n = 1 \end{cases} \quad (22)$$

(參見 21 題)，則得

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \quad (23)$$

故  $f(z)$  繞一包含簡單極點的封閉曲線積分後，其值等於  $2\pi i$  乘上極點的留數。

更廣泛地說，我們有下列重要定理

**定理 5.1:** 若  $f(z)$  在區域  $\mathcal{R}$  中，除了具有有限個極點  $z = a, b, c, \dots$  之外，其餘各點（含邊界  $C$ ）均為解析。假設對應於極點  $z = a, b, c, \dots$  之留數為  $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots$ ，則

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots) \quad (24)$$

即  $f(z)$  之積分值，等於包含於  $C$  內各極點的留數和，再乘上  $2\pi i$ 。柯西定理及積分公式為此結論之特例。此定理稱為**留數定理** (Residue theorem)。

### 5.20 定積分的計算

利用留數定理，以及適當的函數  $f(z)$  和路徑  $C$ （此函數和路徑的選取，須要較深入的技巧），即可求出定積分的值。下列幾種型式是一般常遇到的：

1.  $\int_0^\infty F(x) dx$ ，其中  $F(x)$  為偶函數。

考慮沿路徑  $C$  的線積分  $\oint_C F(z) dz$ ，其中路徑  $C$  包含自  $x = -R$  至  $x = R$  之直線，及半徑為  $R$  之半圓（在  $x$  軸上方），然後再令  $R \rightarrow \infty$ 。見 37 及 38 題。

2.  $\int_0^{2\pi} G(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ ， $G$  為  $\sin \theta$  及  $\cos \theta$  的有理函數。

令  $z = e^{i\theta}$ ，則  $\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ ， $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ ，且  $dz = ie^{i\theta} d\theta$  即  $d\theta = dz/iz$

，故原式即等於  $\oint_C F(z) dz$ ，其中  $C$  為以原點為圓心的單位圓，見 39, 40 題。

3.  $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \left\{ \frac{\cos mx}{\sin mx} \right\} dx$ ，其中  $F(x)$  為有理函數。

考慮  $\oint_C F(z) e^{imz} dz$ ，其中路徑  $C$  和第 1 類相同。見 42 題。

4. 其他各類須用到特殊路徑的問題，見 43, 46 題。

## 附解題

### 複數

#### 5.1 執行下列運算

(a)  $(4 - 2i) + (-6 + 5i) = 4 - 2i - 6 + 5i = 4 - 6 + (-2 + 5)i = -2 + 3i$

(b)  $(-7 + 3i) - (2 - 4i) = -7 + 3i - 2 + 4i = -9 + 7i$

(c)  $(3 - 2i)(1 + 3i) = 3(1 + 3i) - 2i(1 + 3i) = 3 + 9i - 2i - 6i^2 = 3 + 9i - 2i + 6 = 9 + 7i$

(d)  $\frac{-5 + 5i}{4 - 3i} = \frac{-5 + 5i}{4 - 3i} \cdot \frac{4 + 3i}{4 + 3i} = \frac{(-5 + 5i)(4 + 3i)}{16 - 9i^2} = \frac{-20 - 15i + 20i + 15i^2}{16 + 9}$   
 $= \frac{-35 + 5i}{25} = \frac{5(-7 + i)}{25} = \frac{-7}{5} + \frac{1}{5}i$

(e)  $\frac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i} = \frac{i - 1 + (i^2)(i) + (i^2)^2 + (i^2)^2 i}{1 + i} = \frac{i - 1 - i + 1 + i}{1 + i}$   
 $= \frac{i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{i - i^2}{1 - i^2} = \frac{i + 1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

(f)  $|3 - 4i| |4 + 3i| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = (5)(5) = 25$

(g)  $\left| \frac{1}{1 + 3i} - \frac{1}{1 - 3i} \right| = \left| \frac{1 - 3i}{1 - 9i^2} - \frac{1 + 3i}{1 - 9i^2} \right| = \left| \frac{-6i}{10} \right| = \sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

#### 5.2 若 $z_1, z_2$ 為兩複數，證明 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ 。

證 令  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$  則

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)| \\ &= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |x_1 + iy_1| |x_2 + iy_2| = |z_1| |z_2| \end{aligned}$$

WB37304-8 1710



5.3 解  $z^3 - 2z - 4 = 0$ .

圖 可能之有理根為  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ ，代入後，可知  $z = 2$  為原式之一根。故原式可寫成  $(z-2)(z^2 + 2z + 2) = 0$ 。二次方程式 (Quadratic equation)  $az^2 + bz + c = 0$  之根為  $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，在此  $a = 1, b = 2, c = 2$ ，故

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

故原式之解為  $2, -1+i, -1-i$ .

## 複數之極式

5.4 將下列表為極式 (a)  $3 + 3i$ , (b)  $-1 + \sqrt{3}i$ , (c)  $-1$ , (d)  $-2 - 2\sqrt{3}i$ . [見圖 5-4]

圖 (a) 幅角  $\theta = 45^\circ = \pi/4$  弧度，模數  $r = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ，故

$$3 + 3i = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 3\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = 3\sqrt{2} \operatorname{cis} \pi/4 = 3\sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

(b) 幅角  $\theta = 120^\circ = 2\pi/3$  弧度，模數  $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ ，故

$$-1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) = 2 \operatorname{cis} 2\pi/3 = 2e^{2i\pi/3}$$

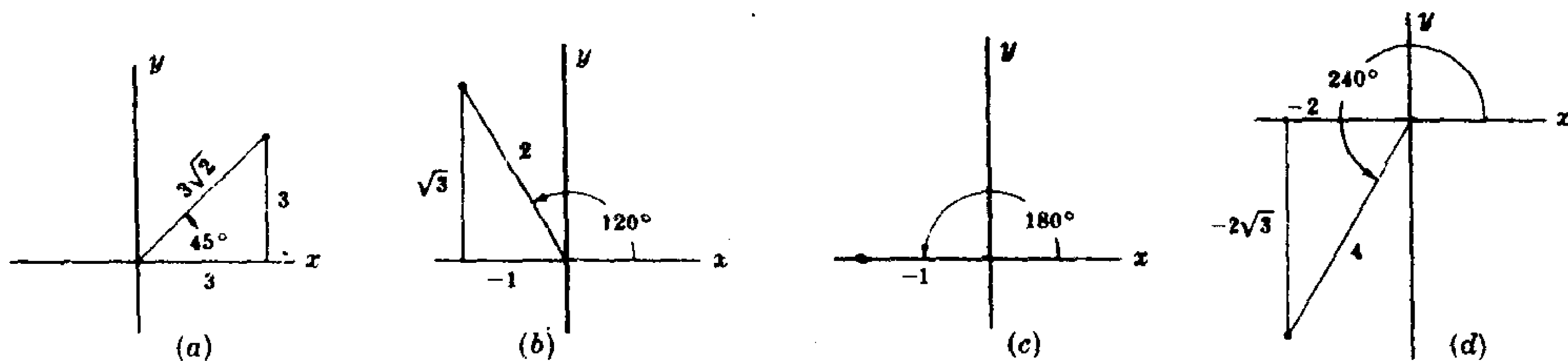


圖 5-4

(c) 幅角  $\theta = 180^\circ = \pi$  弧度，模數  $r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$ ，故

$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = \operatorname{cis} \pi = e^{i\pi}$$

(d) 幅角  $\theta = 240^\circ = 4\pi/3$  弧度，模數  $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$ ，故

$$-2 - 2\sqrt{3}i = 4(\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3) = 4 \operatorname{cis} 4\pi/3 = 4e^{4i\pi/3}$$

5.5 計算 (a)  $(-1 + \sqrt{3}i)^{10}$ , (b)  $(-1 + i)^{1/3}$ .

圖 (a) 由第 4 題(b)及棣馬弗定理，得

$$\begin{aligned} (-1 + \sqrt{3}i)^{10} &= [2(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3)]^{10} = 2^{10}(\cos 20\pi/3 + i \sin 20\pi/3) \\ &= 1024[\cos(2\pi/3 + 6\pi) + i \sin(2\pi/3 + 6\pi)] = 1024(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) \\ &= 1024(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i) = -512 + 512\sqrt{3}i \end{aligned}$$

(b)  $-1 + i = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = \sqrt{2}[\cos(135^\circ + k \cdot 360^\circ) + i \sin(135^\circ + k \cdot 360^\circ)]$   
故

$$(-1 + i)^{1/3} = (\sqrt{2})^{1/3} \left[ \cos\left(\frac{135^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{135^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}\right) \right]$$

當  $k = 0, 1, 2$  時，上式為

$$\sqrt[3]{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ),$$

$$\sqrt[3]{2}(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ),$$

$$\sqrt[3]{2}(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$$

當  $k = 3, 4, 5, 6, 7 \dots$

時，所得答案和以上三式是重

覆的。這些複數 3 次方根在複

數平面上，是以  $P_1, P_2, P_3$

表之，參見圖 5-5。

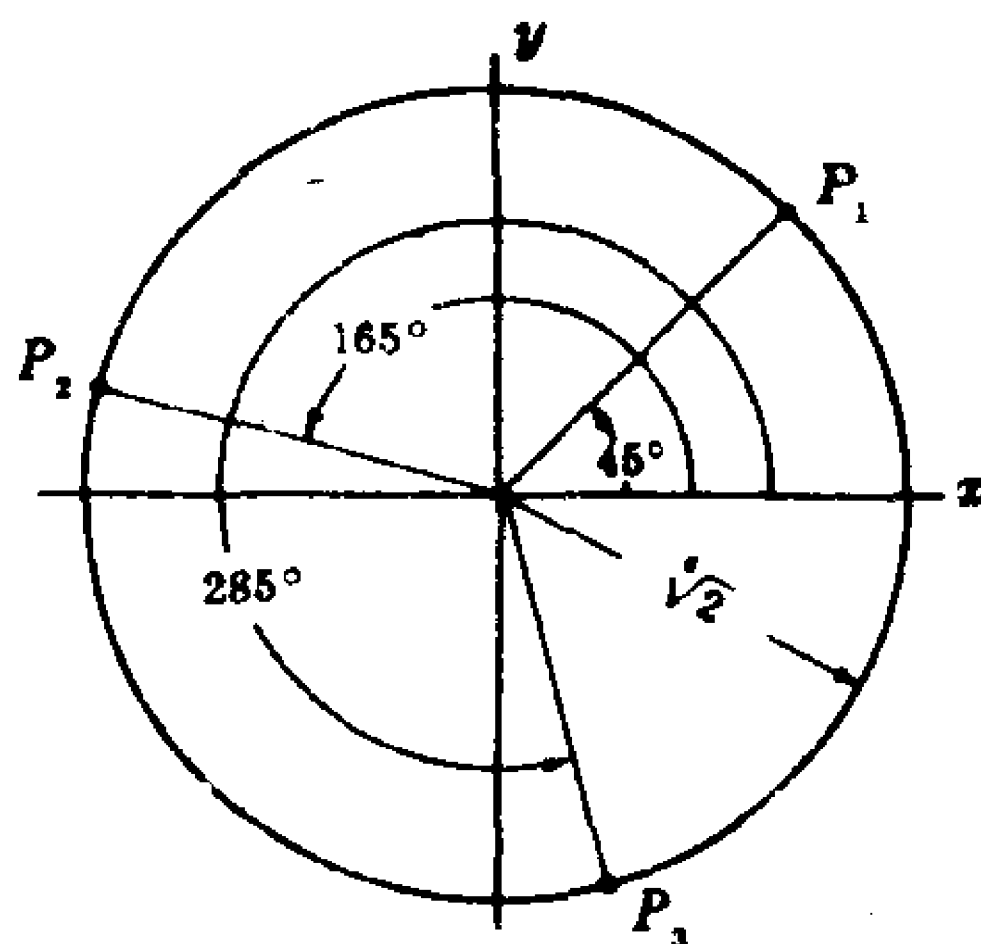


圖 5-5

### 5.6 決定下列方程式所形成的軌跡。

(a)  $|z - 2| = 3$ , (b)  $|z - 2| = |z + 4|$ , (c)  $|z - 3| + |z + 3| = 10$ .

圖 (a) 解 1:  $|z - 2| = |x + iy - 2| = |x - 2 + iy| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 3$  即  $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ ,  
故為半徑等於 3，圓心  $(2, 0)$  的一圓。

解 2:  $|z - 2|$  為兩複數  $z = x + iy$  及  $2 + 0i$  之距離，若此距離保持為 3，則其軌跡即是以  $2 + 0i$  或  $(2, 0)$  為圓心，半徑等於 3 的一圓。

(b) 解 1:  $|x + iy - 2| = |x + iy + 4|$  即  $\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 4)^2 + y^2}$ ，平方之，得  $x = -1$ ，故為一直線。

解 2: 所求軌跡上任一點至  $(2, 0)$  及  $(-4, 0)$  等距，故軌跡為連接  $(2, 0)$  及  $(-4, 0)$  之線段的中垂線，即  $x = -1$ 。

(c) 解 1: 軌跡為  $\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = 10$  即  $\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x + 3)^2 + y^2}$ ，平方並化簡之，得  $25 + 3x = 5\sqrt{(x + 3)^2 + y^2}$ ，再平方化簡之，

得  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ，故為一橢圓，其長軸及短軸長各為 5，4。

解 2: 所求軌跡上任一點至  $(3, 0)$  及  $(-3, 0)$  之距離和為 10，故軌跡為以  $(-3, 0)$  及  $(3, 0)$  為焦點之橢圓，且長軸長為 5。

### 5.7 決定下列方程式在 $z$ 平面的區域：

(a)  $|z| < 1$ .

圖 單位圓之內部，見圖 5-6(a)。

(b)  $1 < |z + 2i| \leq 2$ .

圖  $|z+2i|$  為  $z$  至  $-2i$  的距離，故  $|z+2i|=1$  為圓心在  $(0, -2)$  或  $-2i$ ，半徑為 1 的圓，而  $|z+2i|=2$  為半徑等於 2，圓心在  $-2i$  的圓。故  $1 < |z+2i| \leq 2$  表示在  $|z+2i|=1$  之外，且在  $|z+2i|=2$  之內（包含  $|z+2i|=2$ ）的區域。見圖 5-6 (b)。

(c)  $\pi/3 \leq \arg z \leq \pi/2$ 。

圖 在這裏  $\arg z = \theta$ ，且  $z = re^{i\theta}$ 。此範圍為由  $\theta = \pi/3$  及  $\theta = \pi/2$  兩直線所圍成之無限區域，且包含這兩條直線，見圖 5-6 (c)。

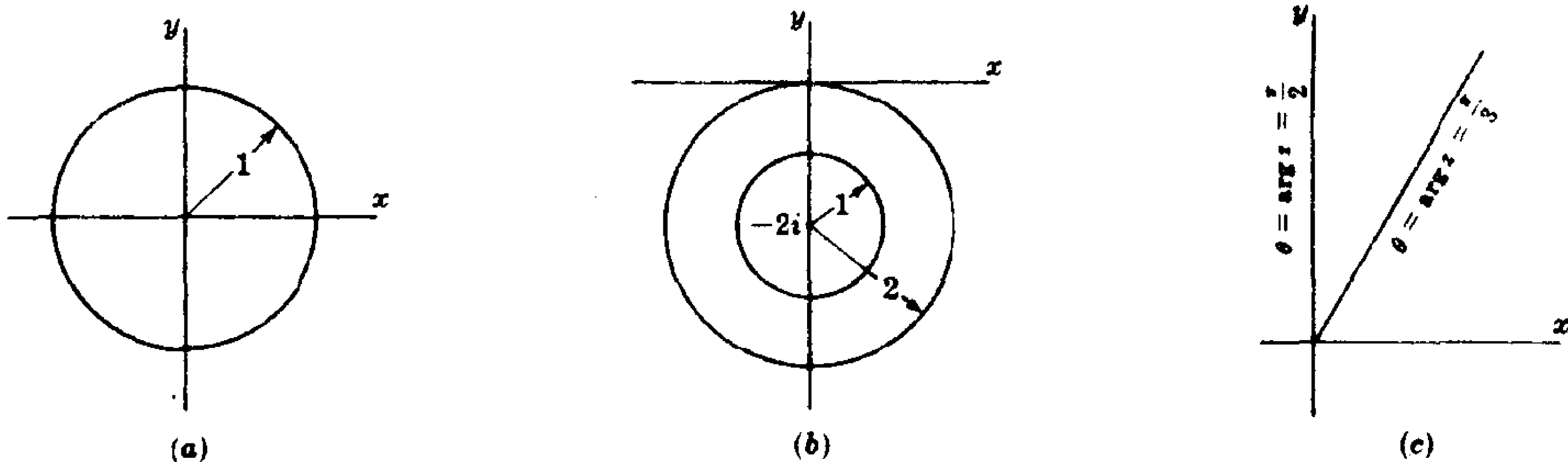


圖 5-6

5.8 將下列表為  $u(x, y) + iv(x, y)$  之型式，其中  $u$  及  $v$  為實數：

(a)  $z^3$ , (b)  $1/(1-z)$ , (c)  $e^{3z}$ , (d)  $\ln z$ 。

圖

$$(a) \quad w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \\ = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

$$\text{故} \quad u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

$$(b) \quad w = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(x+iy)} = \frac{1}{1-x-iy} \cdot \frac{1-x+iy}{1-x+iy} = \frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}$$

$$\text{故} \quad u(x, y) = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}, \quad v(x, y) = \frac{y}{(1-x)^2+y^2}.$$

$$(c) \quad e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y) \quad \text{故} \quad u = e^{3x} \cos 3y, \quad v = e^{3x} \sin 3y$$

$$(d) \quad \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln \sqrt{x^2+y^2} + i \tan^{-1} y/x \quad \text{故}$$

$$u = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2), \quad v = \tan^{-1} y/x$$

$\ln z$  為多值函數（在此題中它有無限多個值），因為  $\theta$  可任意加上  $2\pi$  的整數倍。對數之主值（Principal value）定義為在  $0 \leq \theta < 2\pi$  所得之值，此稱為  $\ln z$  的主分枝（Principal branch）。

5.9 證明 (a)  $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

(b)  $\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ 。

圖 利用關係式  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ,  $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ , 得

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sin z &= \sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} \{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)\} \\ &= (\sin x) \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i(\cos x) \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理, } \cos z &= \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{e^{ix-y} + e^{-ix+y}\} = \frac{1}{2} \{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)\} \\ &= (\cos x) \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) - i(\sin x) \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned}$$

### 導式及柯西 - 里曼方程式

5.10 證明  $\frac{d}{dz} \bar{z}$  在任何地方均不存在 ( $\bar{z}$  為  $z$  的共軛複數)。

圖 由定義,  $\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ , 若此極限存在, 且和  $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$  逼近零的方式無關, 則

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\overline{x + iy + \Delta x + i \Delta y} - \overline{x + iy}}{\Delta x + i \Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{x - iy + \Delta x - i \Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i \Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x - i \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} \end{aligned}$$

若  $\Delta y = 0$ , 則所求為  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ .

若  $\Delta x = 0$ , 則所求為  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i \Delta y}{i \Delta y} = -1$ .

由以上得知, 此極限值和  $\Delta z \rightarrow 0$  的方式有關, 故  $\bar{z}$  的導式不存在, 亦即  $\bar{z}$  在任意點均不可解析 (Non-analytic)。

5.11 (a) 若  $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ , 求  $\frac{dw}{dz}$ , (b) 決定在何處  $w$  為不可解析。

圖 (a) 解 1:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)} - \frac{1+z}{1-z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)} \\ &= \frac{2}{(1-z)^2} \quad \text{只要 } z \neq 1, \text{ 則此答案和 } \Delta z \rightarrow 0 \text{ 的方式無關。}\end{aligned}$$

解2：若  $z \neq 1$ ，則可應用一般微分規則，故在此利用兩式相除的微分規則得，

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{(1-z) \frac{d}{dz}(1+z) - (1+z) \frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2} = \frac{(1-z)(1) - (1+z)(-1)}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$$

(b) 此函數除了在  $z = 1$  之外，其餘均為可解析，因在  $z = 1$  時導式不存在。故此函數在  $z = 1$  不可解析。

5.12 證明  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  在某區域為可解析之必要條件為  $u$ ，

$v$  在此區域中須滿足柯西 - 里曼方程式  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

證 因  $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ ，且

$$f(z+\Delta z) = f[x+\Delta x+i(y+\Delta y)] = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i v(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

故

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) + i\{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y)\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

若  $\Delta y = 0$ ，則所求極限為

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \left\{ \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

若  $\Delta x = 0$ ，則所求極限為

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \left\{ \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right\} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

若導式存在，則在此特殊情況下所求的極限值應相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

故得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  與  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ 。

反之，我們可證明：若在某區域中， $u$  及  $v$  對  $x$  及  $y$  的一次偏導式均連續，則柯西-里曼方程式即為  $f(z)$  在此區域為解析的充分條件。

- 5.13 (a) 若  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  在區域  $\mathcal{R}$  為解析，證明曲線族  $u(x, y) = C_1$  及  $v(x, y) = C_2$  互相垂直。(b) 若  $f(z) = z^2$ ，試驗證之。

圖 (a) 考慮兩曲線族的特例： $u(x, y) = u_0$  及  $v(x, y) = v_0$  相交於  $(x_0, y_0)$

$$\text{但 } du = u_x dx + u_y dy = 0, \quad \text{故 } \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}.$$

$$\text{同理 } dv = v_x dx + v_y dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y}.$$

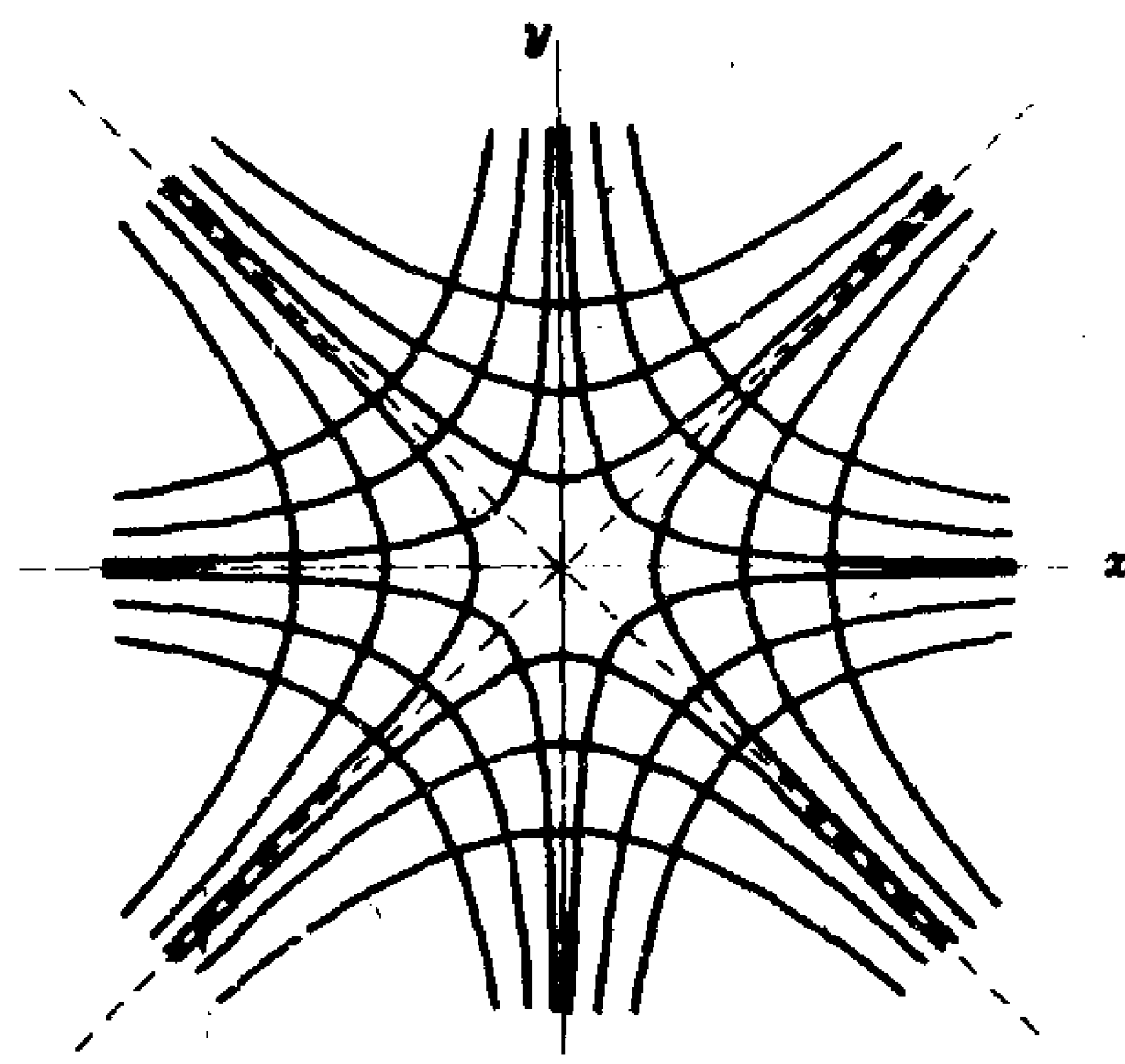
上兩式即代表兩曲線在交點  $(x_0, y_0)$  的斜率。

由柯西-里曼方程式  $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ，可得在交點  $(x_0, y_0)$  的斜率積為

$$\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = -1$$

故兩組曲線族中任意（各別）兩條曲線為垂直，即此兩組曲線族互相垂直。

- (b) 若  $f(z) = z^2$ ，則  $u = x^2 - y^2$ ， $v = 2xy$ ，數個  $x^2 - y^2 = c_1$  及  $2xy = c_2$  之圖形參見圖 5-7。



■ 5-7

- 5.14 在空氣動力學及流體力學中，若  $f(z)$  為解析且  $f(z) = \phi + i\psi$ ，則  $\phi, \psi$  分別稱為速度勢 (Velocity potential) 及流線函數 (Stream function)。若  $\phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y$ ，(a) 求  $\psi$ ，(b) 求  $f(z)$ 。

圖 (a) 由柯西-里曼方程式， $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ， $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$  故

$$(1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x + 4 \quad (2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2y - 2$$

解 1：積分(1)式， $\psi = 2xy + 4y + F(x)$ 。

積分(2)式， $\psi = 2xy - 2x + G(y)$ 。

上兩式必須相等，故  $F(x) = -2x + c$ ， $G(y) = 4y + c$  其中  $c$  為任意實常數，所

以  $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$ .

解 2 :

積分(1)式,  $\psi = 2xy + 4y + F(x)$ . 代入(2)式,  $2y + F'(x) = 2y - 2$  得  $F'(x) = -2$  故  $F(x) = -2x + c$  所以  $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$ .

(b) 由(a),

$$\begin{aligned} f(z) &= \phi + i\psi = x^2 + 4x - y^2 + 2y + i(2xy + 4y - 2x + c) \\ &= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 4(x + iy) - 2i(x + iy) + ic \\ &= z^2 + 4z - 2iz + c_1 \end{aligned}$$

其中  $c_1$  為純虛數之常數。

亦可由下法解之：因  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ , 故  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .

代入  $\phi + i\psi$  即可得  $f(z)$ , 其中含  $\bar{z}$  之項將會抵消而不出現於  $f(z)$  中。

## 線積分

5.15 計算  $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y) dx + (y^2 + x) dy$  積分路徑為(a)由  $(0, 1)$  至  $(1, 2)$  的直線

, (b)由  $(0, 1)$  至  $(1, 1)$ , 再由  $(1, 1)$  至  $(1, 2)$  的兩直線, (c)拋物線  $x = t$ ,  $y = t^2 + 1$ 。

解 (a) 在  $xy$  平面上, 連接  $(0, 1)$  及  $(1, 2)$  之直線為  $y = x + 1$ , 故  $dy = dx$  原式等於

$$\int_{x=0}^1 \{x^2 - (x+1)\} dx + \{(x+1)^2 + x\} dx = \int_0^1 (2x^2 + 2x) dx = 5/3$$

(b) 由  $(0, 1)$  至  $(1, 1)$  的直線上,  $y=1$ ,  $dy=0$ , 故線積分為

$$\int_{x=0}^1 (x^2 - 1) dx + (1+x)(0) = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = -2/3$$

由  $(1, 1)$  至  $(1, 2)$  的直線上,  $x=1$ ,  $dx=0$  故線積分為

$$\int_{y=1}^2 (1-y)(0) + (y^2 + 1) dy = \int_1^2 (y^2 + 1) dy = 10/3$$

故原式為  $= -2/3 + 10/3 = 8/3$ 。

(c)  $(x, y) = (0, 1)$  時,  $t = 0$ ,  $(x, y) = (1, 2)$  時,  $t = 1$ , 故線積分為

$$\int_{t=0}^1 \{t^2 - (t^2 + 1)\} dt + \{(t^2 + 1)^2 + t\} 2t dt = \int_0^1 (2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1) dt = 2$$

### 平面上的革忍定理

5.16 若  $C$  為簡單封閉曲線，且任何和  $x$  軸或  $y$  軸平行的直線，最多僅和  $C$  相交於兩點。試證明以  $C$  為積分路徑的革忍定理。

圖 令曲線  $AEB$  及  $AFB$  (見圖 5-8) 的方程式分別為  $y = Y_1(x)$  及  $y = Y_2(x)$ ，若  $\mathcal{R}$  為由曲線  $C$  所包住的區域，

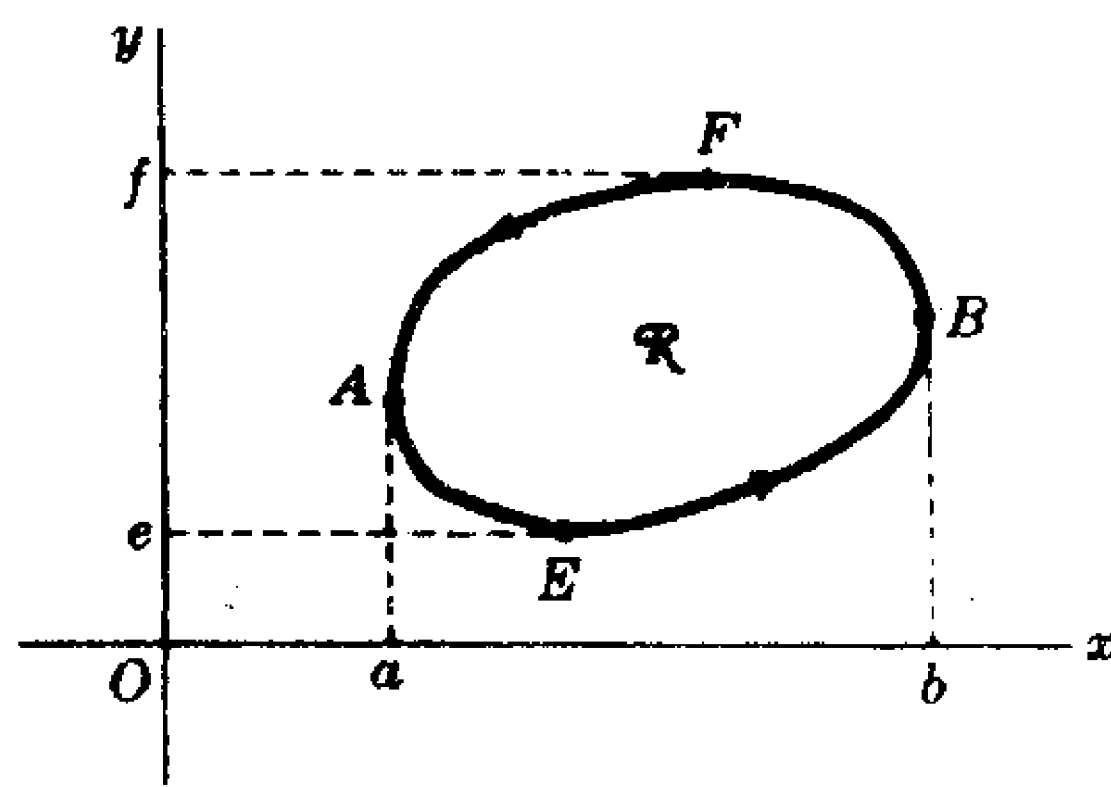


圖 5-8

$$\begin{aligned} \text{則} \quad \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{x=a}^b \left[ \int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx \\ &= \int_{x=a}^b P(x, y) \Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} dx = \int_a^b [P(x, Y_2) - P(x, Y_1)] dx \\ &= - \int_a^b P(x, Y_1) dx - \int_b^a P(x, Y_2) dx = - \oint_C P dx \end{aligned}$$

故

$$(1) \quad \oint_C P dx = - \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

同理，令曲線  $EAF$  及  $EBF$  的方程式分別為  $x = X_1(y)$  及  $x = X_2(y)$ ，則

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_{y=e}^f \left[ \int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy = \int_e^f [Q(X_2, y) - Q(X_1, y)] dy \\ &= \int_e^f Q(X_1, y) dy + \int_f^e Q(X_2, y) dy = \oint_C Q dy \end{aligned}$$

$$(2) \quad \oint_C Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

$$\text{將(1)及(2)相加} \quad \oint_C P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

此結論可輕易推廣至其他簡單封閉曲線。

### 5.17 驗證平面上的革忍定理

$$\oint_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$$

其中  $C$  為由  $y = x^2$  及  $x = y^2$  包圍區域所形成的封閉曲線。

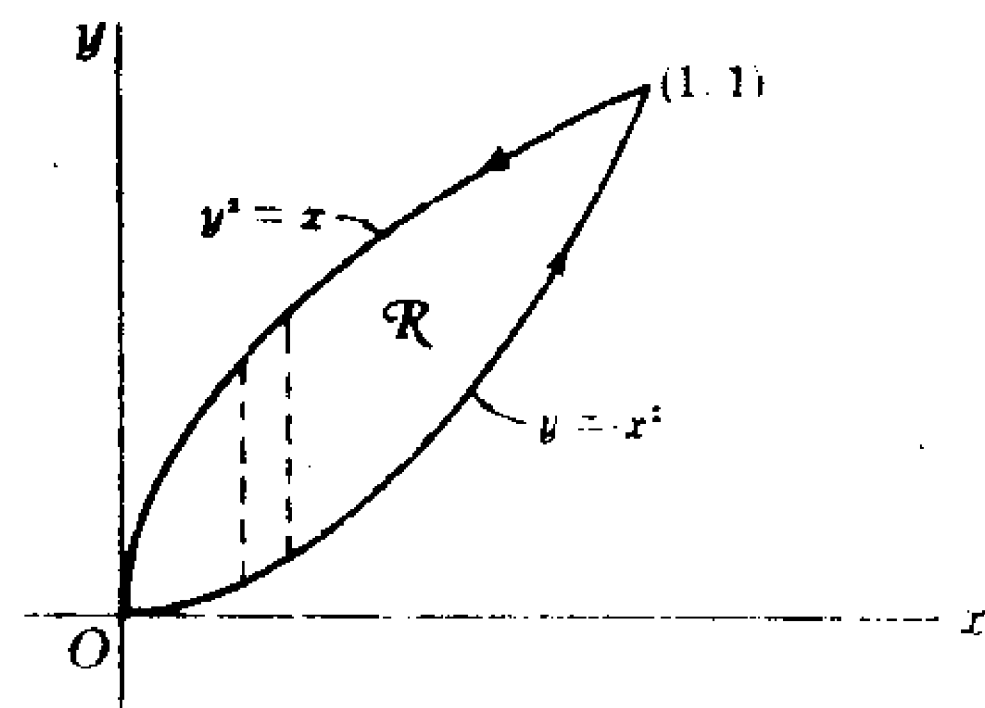


圖 5-9



圖 平面曲線  $y = x^2$  及  $y^2 = x$  相交於  $(0, 0)$  及  $(1, 1)$ 。積分路徑  $c$  的正方向可見圖 5-9。

若沿  $y = x^2$  積分，則線積分等於

$$\int_{x=0}^1 \{ (2x)(x^2) - x^2 \} dx + \{ x + (x^2)^2 \} d(x^2) = \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5) dx = 7/6$$

若沿  $y^2 = x$  積分，則線積分等於

$$\int_{y=1}^0 \{ 2(y^2)(y) - (y^2)^2 \} d(y^2) + \{ y^2 + y^2 \} dy = \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2) dy = -17/15$$

故所求之線積分爲  $= 7/6 - 17/15 = 1/30$ 。

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (2xy - x^2) \right\} dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{R}} (1 - 2x) dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 (y - 2xy) \Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3) dx = 1/30 \end{aligned}$$

由此可知此例適用格林定理。

## 積分，柯西定理，柯西積分公式

### 5.18 計算 $\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$

- (a) 沿拋物線  $x = t$ ， $y = t^2$  積分，其中  $1 \leq t \leq 2$ 。
- (b) 沿連接  $1+i$  及  $2+4i$  的直線積分。
- (c) 沿  $1+i$  至  $2+i$ ，然後再至  $2+4i$  的兩直線積分。

圖  $z = x + iy$  代入

$$\begin{aligned} \int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz &= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x + iy)^2 (dx + i dy) = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2 - y^2 + 2ixy)(dx + i dy) \\ &= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy + i \int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy \end{aligned}$$

解 1：

(a) 點  $(1, 1)$  及  $(2, 4)$  分別對應於  $t = 1$  及  $t = 2$ ，故上式線積分變爲

$$\int_{t=1}^2 \{ (t^2 - t^4) dt - 2(t)(t^2)2t dt \} + i \int_{t=1}^2 \{ 2(t)(t^2) dt + (t^2 - t^4)(2t) dt \} = -\frac{86}{3} - 6i$$

- (b) 連接  $(1, 1)$  及  $(2, 4)$  之直線方程式為  $y - 1 = \frac{4-1}{2-1}(x-1)$  即  $y = 3x - 2$ , 故

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^2 \{[x^2 - (3x-2)^2] dx - 2x(3x-2)3 dx\} \\ + i \int_{x=1}^2 \{2x(3x-2) dx + [x^2 - (3x-2)^2]3 dx\} = -\frac{86}{3} - 6i \end{aligned}$$

- (c) 由  $1+i$  至  $2+i$  [或  $(1, 1)$  至  $(2, 1)$ ] 時,  $y=1$ ,  $dy=0$  故

$$\int_{x=1}^2 (x^2 - 1) dx + i \int_{x=1}^2 2x dx = \frac{4}{3} + 3i$$

由  $2+i$  至  $2+4i$  [或  $(2, 1)$  至  $(2, 4)$ ] 時,  $x=2$ ,  $dx=0$  故

$$\int_{y=1}^4 -4y dy + i \int_{y=1}^4 (4 - y^2) dy = -30 - 9i$$

相加得

$$\left(\frac{4}{3} + 3i\right) + (-30 - 9i) = -\frac{86}{3} - 6i.$$

解 2 :

因線積分和路徑無關 (見第 19 題), 故以上(a)(b)(c)所得答案均相同。在此情況下, 可直接計算 (將之視為實數) 如下

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{1+i}^{2+4i} = \frac{(2+4i)^3}{3} - \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{86}{3} - 6i$$

- 5.19 (a) 證明柯西定理: 若  $f(z)$  在簡單封閉曲線  $C$  所包圍的區域內及此曲線上均為可解析, 則  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

- (b) 在以上的條件下, 證明  $\int_{P_1}^{P_2} f(z) dz$  之值和連接  $P_1, P_2$  之路徑無關。

證 (a)  $\oint_C f(z) dz = \oint_C (u + iv)(dx + i dy) = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy$

由革忍定理,

$$\oint_C u dx - v dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy, \quad \oint_C v dx + u dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy$$

其中  $\mathcal{R}$  為由  $C$  所包圍的區域。

因  $f(z)$  為解析， $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ， $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ （見 12 題），故上式積分式為零，即

$$\oint_C f(z) dz = 0, \text{ 我們在此推導過程中，假設 } f'(z) \text{ 為連續（故偏導式亦連續）}，$$

然而這項限制並非必要。

(b) 考慮連接  $P_1, P_2$  的兩條路徑（見圖 5-10）。由柯西定理得

$$\begin{aligned} \int_{P_1 A P_2 B P_1} f(z) dz &= 0 \\ \int_{P_1 A P_2} f(z) dz + \int_{P_2 B P_1} f(z) dz &= 0 \\ \int_{P_1 A P_2} f(z) dz &= - \int_{P_2 B P_1} f(z) dz = \int_{P_1 B P_2} f(z) dz \end{aligned}$$

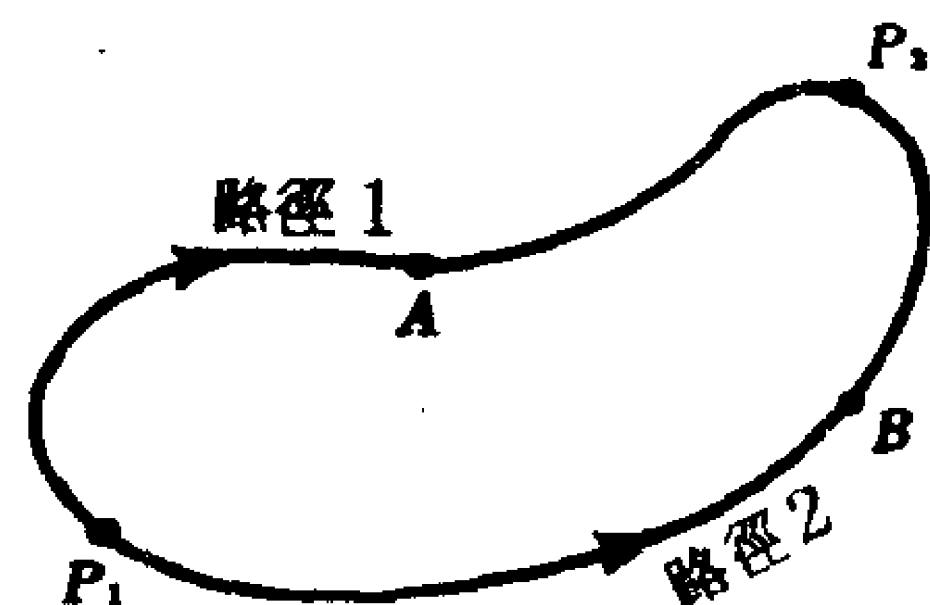


圖 5-10

即沿  $P_1 A P_2$ （路徑 1）之積分 = 沿  $P_1 B P_2$ （路徑 2）之積分，故積分值和連接  $P_1, P_2$  之路徑無關。

以上推論解釋了 18 題的結果，因  $f(z) = z^2$  為可解析的。

5.20 若  $f(z)$  在封閉曲線  $C_1, C_2$ ，及其所包圍的區域內，均為可解析（見圖 5-11），證明

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

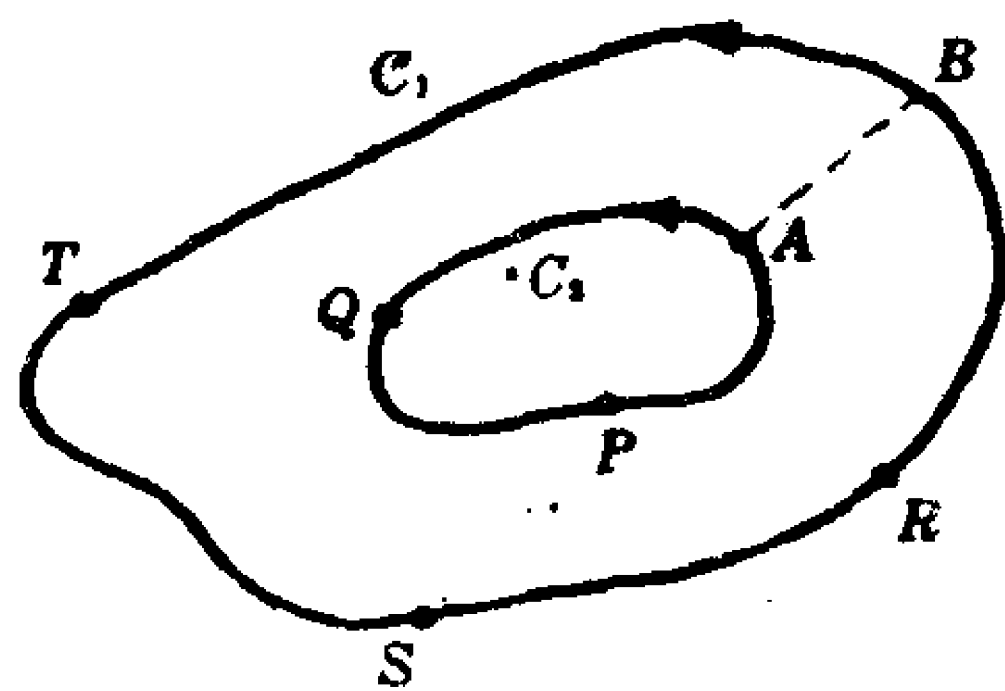


圖 5-11

證 如圖 5-11 所示，畫一線  $AB$ （稱為橫切，cross-cut）連接  $C_1$  上任一點及  $C_2$  上任一點。由柯西定理（第 19 題）

$$\int_{A Q P A R S T B A} f(z) dz = 0$$

（因  $f(z)$  在陰影部份及邊界均為解析），故

$$\int_{A Q P A} f(z) dz + \int_{A B} f(z) dz + \int_{B R S T B} f(z) dz + \int_{B A} f(z) dz = 0 \quad (1)$$

但  $\int_{A B} f(z) dz = - \int_{B A} f(z) dz$ ，故(1)式變為

$$\int_{AQP A} f(z) dz = - \int_{BRSTB} f(z) dz = \int_{BTSRB} f(z) dz$$

即 
$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

在此  $f(z)$  在曲線  $C_2$  內並非一定是可解析。

5.21 (a) 證明 
$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n=2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

其中  $C$  為一簡單封閉曲線， $z=a$  為曲線  $C$  內部之點。

(b) 若  $n=0, -1, -2, -3, \dots$ ，則積分值為何？

圖 (a) 令  $C_1$  為半徑  $\epsilon$ ，圓心在  $z=a$  之一圓（見圖 5-12）。因在  $C$  和  $C_1$  上及其所包圍的區域內， $(z-a)^{-n}$  均為可解析，故由 2.0 題。

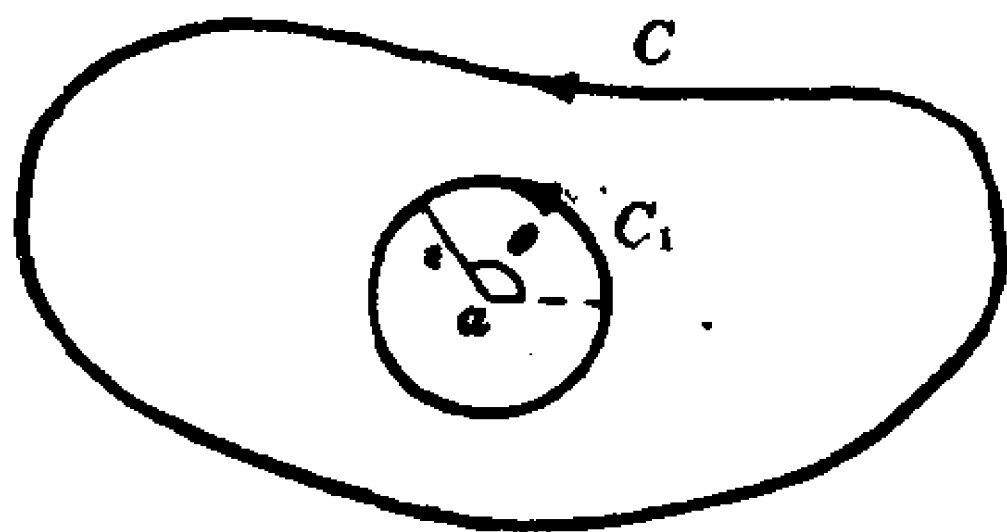


圖 5-12

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

在上面積分式中， $C_1$  上任一點為  $|z-a|=\epsilon$ ，即  $z-a=\epsilon e^{i\theta}$  且  $dz=i\epsilon e^{i\theta} d\theta$ ，故積分式變為

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{其中 } n \neq 1$$

若  $n=1$ ，取積分式變為  $i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$ 。

(b) 當  $n=0, -1, -2, \dots$  時，積分號內的式子為  $1, (z-a), (z-a)^2, \dots$ ，這些函數在  $C_1$  內均為可解析（含  $z=a$  點），故由柯西定理，積分值均為零。

5.22 計算  $\oint_C \frac{dz}{z-3}$ ，其中  $C$  為 (a) 一圓  $|z|=1$ ，(b) 一圓  $|z+i|=4$ 。

圖 (a) 因  $z=3$  並非在  $|z|=1$  之內部，故積分值為零（見 19 題）。

(b) 因  $z=3$  在  $|z+i|=4$  之內部，故積分為  $2\pi i$ （見 21 題）。

5.23 若  $f(z)$  在簡單封閉曲線  $C$  及其內部均為可解析，而  $a$  為  $C$  內之任意點，證明

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

圖 由 20 題及 21 題之圖，得

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

令  $z-a = \epsilon e^{i\theta}$ ，則上式右端變為  $i \int_0^{2\pi} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta$ ，但因  $f(z)$  為可解析，故  $f(z)$  亦為連續，當  $\epsilon \rightarrow 0$  時，

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi i f(a)$$

故得證。

5.24 計算 (a)  $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi} dz$ , (b)  $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz$  其中  $C$  為一圓  $|z-1|=3$ 。

圖 (a) 因  $z=\pi$  在  $C$  之內部，故  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\cos z}{z-\pi} dz = \cos \pi = -1$  (由 23 題，其中  $f$

$$f(z) = \cos z, a = \pi), \text{ 即 } \oint_C \frac{\cos z}{z-\pi} dz = -2\pi i.$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \oint_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz &= \oint_C e^z \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \oint_C \frac{e^z}{z} dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1} dz \\ &= 2\pi i e^0 - 2\pi i e^{-1} = 2\pi i (1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

(由 23 題，因  $z=0$  及  $z=-1$  均在  $C$  之內部)。

5.25 計算  $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} dz$  其中  $C$  為包含  $z=1$  之任意簡單封閉曲線。

圖 解 1：由柯西積分公式，得  $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ 。

若  $n=2$  且  $f(z) = 5z^2-3z+2$ ，則  $f''(1)=10$ ，故

$$10 = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} dz \quad \text{即} \quad \oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} dz = 10\pi i$$

解 2：  $5z^2-3z+2 = 5(z-1)^2 + 7(z-1) + 4$ ，故

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz &= \oint_C \frac{5(z-1)^2 + 7(z-1) + 4}{(z-1)^3} dz \\
&= 5 \oint_C \frac{dz}{z-1} + 7 \oint_C \frac{dz}{(z-1)^2} + 4 \oint_C \frac{dz}{(z-1)^3} = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0) \\
&= 10\pi i
\end{aligned}$$

(由 21 題)。

## 級數及奇點

5.26 當  $z$  為何值時，下列級數會收斂？

圖 (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$ ，第  $n$  項  $= u_n = \frac{z^n}{n^2 2^n}$ ，故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{z^n} \right| = \frac{|z|}{2}$$

由比值審檢法 (Ratio test) 可知，當  $|z| < 2$  時，原式收斂，當  $|z| > 2$  時原式發散，若  $|z| = 2$ ，則此法失效。

因  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收斂，故當  $|z| = 2$  時，絕對值級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2 2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2 2^n}$

收斂。

故當  $|z| \leq 2$ ，即在  $|z| = 2$  的內部及邊界時，級數將會收斂 (絕對收斂，Converges absolutely)。

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$ ，因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1} z^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-z^2}{2n(2n+1)} \right| = 0$$

故原級數即為  $\sin z$ ，對任何  $z$  值均收斂。

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$ ，因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z-i)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(z-i)^n} \right| = \frac{|z-i|}{3}$

因此若  $|z-i| < 3$ ，則原式收斂，若  $|z-i| > 3$ ，則原式發散。

若  $|z-i| = 3$ ，則  $z-i = 3e^{i\theta}$ ，且級數變為  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}$ ，當  $n \rightarrow \infty$  時，

第  $n$  項不趨近於 0，故級數發散。

故級數在圓  $|z-i| = 3$  之內 (不含邊界) 為收斂。

5.27 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  在  $|z| \leq R$  時為絕對收斂 (Absolutely convergent), 證明在此範圍內的  $z$  值, 原級數為一致收斂 (Uniformly convergent)。

圖 對於複數及複變函數的級數, 其定義, 定理及證明均和實級數類似。

特別的是, 若  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$  在區域  $\mathcal{R}$  內收斂, 則  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$  在區域  $\mathcal{R}$  內為絕對收斂。我們可證明: 若  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$  在  $\mathcal{R}$  中收斂, 則  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$  在  $\mathcal{R}$  中亦收斂, 即絕對收斂的級數必收斂。

另外, 假設級數  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$  在區域  $\mathcal{R}$  中收斂至一和函數 (Sum function)  $S(z)$ , 若對任意  $\epsilon > 0$ , 我們可求得  $N$ , 使得

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon \quad (\text{對所有 } n > N \text{ 均成立})$$

其中  $N$  值隨  $\epsilon$  而變, 但和在  $\mathcal{R}$  中的  $z$  值無關, 且

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z)$$

則原級數稱為一致收斂。

測試一致收斂的一重要方法如下: 對所有  $R$  中的  $z$ , 我們可以找到常數  $M_n$ , 使得

$$|u_n(z)| \leq M_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{且} \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_n \quad \text{收斂}$$

則  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$  在  $\mathcal{R}$  中為一致收斂。此稱為瓦士曲士  $M$  測試法 (Weierstrass  $M$  test)。

在此題中, 我們有

$$|a_n z^n| \leq |a_n| R^n = M_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

因  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  收斂, 故由瓦士曲士  $M$  測試, 可知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  在  $|z| \leq R$  時一致收斂。

5.28 在下列各函數中, 找出在  $z$  平面上所有可能的奇點。

圖 (a)  $\frac{z^2}{(z+1)^3}$ ,  $z = -1$  為 3 階極點。

(b)  $\frac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$ ,  $z = 4$  為 2 階級點 (雙重極點);  $z = i$  及  $z = 1$

$-2i$  為 1 階極點 (單極點)。

- (c)  $\frac{\sin mz}{z^2 + 2z + 2}$ ,  $m \neq 0$  因  $z^2 + 2z + 2 = 0$  之根為  $z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$   
 $-1 \pm i$ , 故可寫成  $z^2 + 2z + 2 = (z - (-1+i))(z - (-1-i)) = (z+1-i)(z+1+i)$ .

此函數有兩個單極點  $z = -1+i$  及  $z = -1-i$ 。

- (d)  $\frac{1 - \cos z}{z}$ ,  $z=0$  似乎為一奇點, 但因為  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z} = 0$ , 故  $z=0$  為一  
 可去奇點。

另解:

$$\text{因 } \frac{1 - \cos z}{z} = \frac{1}{z} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right\} = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \dots,$$

由此可看出  $z=0$  為一可去奇點。

- (e)  $e^{-1/(z-1)^2} = 1 - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2!(z-1)^4} - \dots$

此為洛朗級數, 其主要部份包含無限多個非零項, 故  $z=1$  為本性奇點 (Essential singularity)。

- (f)  $e^z$ 。

此函數沒有具有有限值之奇點。然而令  $z = 1/u$ , 可得原式為  $e^{1/u}$ , 故  $u=0$  為其本性奇點, 由此可推知  $z=\infty$  為  $e^z$  的本性奇點。

一般而言, 欲決定  $f(z)$  在  $z=\infty$  是否為一奇點, 可令  $z=1/u$  代入, 然後檢查此新函數在  $u=0$  的各種行為。

5.29 若  $f(z)$  在一圓 (半徑  $R$ , 圓心  $a$ ) 及其內部均為可解析, 且  $a+h$  為此圓內部之任意一點, 證明泰勒定理 (Taylor's theorem):

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) +$$

圖 由柯西積分公式 (23 題) 得

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z-a-h} \quad (1)$$

但

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a-h} &= \frac{1}{(z-a)[1-h/(z-a)]} \\ &= \frac{1}{(z-a)} \left\{ 1 + \frac{h}{(z-a)} + \frac{h^2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{h^n}{(z-a)^n} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^n(z-a-h)} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$



將(2)代入(1)，並利用柯西積分公式，得

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z-a} + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} + R_n \\ &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n \end{aligned}$$

其中 
$$R_n = \frac{h^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

當  $z$  在  $C$  上時， $\left| \frac{f(z)}{z-a-h} \right| \leq M$ ，且  $|z-a| = R$ ，故由第(14)式得（其中  $2\pi R$  為  $C$  之長度）

$$|R_n| \leq \frac{|h|^{n+1} M}{2\pi R^{n+1}} \cdot 2\pi R$$

當  $n \rightarrow \infty$  時， $|R_n| \rightarrow 0$ ，即  $R_n \rightarrow 0$ ，故得證。

若  $f(z)$  在一環狀區域  $r_1 \leq |z-a| \leq r_2$  內為可解析，則我們可將泰勒級數推廣至洛丹級數（見 119 題）。在某些情況下（如 30 題），洛丹級數可由已知的泰勒級數求得。

5.30 求出下列函數的洛丹級數（相對於所給的奇點），指出奇點的名稱，並求出級數的收斂範圍。

圈 (a)  $\frac{e^z}{(z-1)^2}$ ;  $z=1$  令  $z-1=u$ ，則  $z=1+u$  且

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{(z-1)^2} &= \frac{e^{1+u}}{u^2} = e \cdot \frac{e^u}{u^2} = \frac{e}{u^2} \left( 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots \right) \\ &= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!} + \frac{e(z-1)}{3!} + \frac{e(z-1)^2}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

$z=1$  為 2 階極點，即雙重極點。

此級數對於所有  $z \neq 1$  均收斂。

(b)  $z \cos \frac{1}{z}$ ;  $z=0$ .

$$z \cos \frac{1}{z} = z \left( 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \cdots \right) = z - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!z^3} - \frac{1}{6!z^5} + \cdots$$

$z=0$  為本性奇點。

此級數對於所有  $z \neq 0$  均收斂。

(c)  $\frac{\sin z}{z-\pi}$ ;  $z=\pi$  令  $z-\pi=u$ ，則  $z=u+\pi$  且

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z-\pi} &= \frac{\sin(u+\pi)}{u} = -\frac{\sin u}{u} = -\frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots\right) \\ &= -1 + \frac{u^2}{3!} - \frac{u^4}{5!} + \dots = -1 + \frac{(z-\pi)^2}{3!} - \frac{(z-\pi)^4}{5!} + \dots\end{aligned}$$

$z = \pi$  為可去奇點。

此級數對於所有  $z$  值均收斂。

(d)  $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ ;  $z = -1$  令  $z+1 = u$ , 則

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{u-1}{u}(1-u+u^2-u^3+u^4-\dots) \\ &= -\frac{1}{u} + 2 - 2u + 2u^2 - 2u^3 + \dots \\ &= -\frac{1}{z+1} + 2 - 2(z+1) + 2(z+1)^2 - \dots\end{aligned}$$

$z = -1$  為 1 階極點，即為單極點。

此級數對於所有  $0 < |z+1| < 1$  之  $z$  值均收斂。

(e)  $\frac{1}{z(z+2)^3}$ ;  $z = 0, -2$

情況 1:  $z = 0$ , 利用二項式定理,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z+2)^3} &= \frac{1}{8z(1+z/2)^3} = \frac{1}{8z} \left\{ 1 + (-3)\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{8z} - \frac{3}{16} + \frac{3}{16}z - \frac{5}{32}z^2 + \dots\end{aligned}$$

$z = 0$  為 1 階極點，即單極點。

當  $0 < |z| < 2$  時，級數收斂。

情況 2:  $z = -2$ , 令  $z+2 = u$ , 則

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z+2)^3} &= \frac{1}{(u-2)u^3} = \frac{1}{-2u^3(1-u/2)} = -\frac{1}{2u^3} \left\{ 1 + \frac{u}{2} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^3 + \left(\frac{u}{2}\right)^4 + \dots \right\} \\ &= -\frac{1}{2u^3} - \frac{1}{4u^2} - \frac{1}{8u} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}u - \dots \\ &= -\frac{1}{2(z+2)^3} - \frac{1}{4(z+2)^2} - \frac{1}{8(z+2)} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}(z+2) - \dots\end{aligned}$$

$z = -2$  為 3 階極點。

$0 < |z+2| < 2$  時，級數收斂。

## 留數及留數定理

5.31 若  $f(z)$  在  $z = a$  為  $n$  階極點，而在其他各點（簡單封閉曲線  $C$  及其內部）均為可解析，則  $f(z)$  可表為

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

其中  $a_{-n} \neq 0$ ，證明

$$(a) \oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

$$(b) a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}.$$

證 (a) 積分之，並利用 21 題，得

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} dz + \cdots + \oint_C \frac{a_{-1}}{z-a} dz + \oint_C \{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots\} dz \\ &= 2\pi i a_{-1} \end{aligned}$$

因只留下  $a_{-1}$ ，故我們稱  $f(z)$  在極點  $z = a$  的留數 (Residue) 為  $a_{-1}$ 。

(b) 乘上  $(z-a)^n$  可得泰勒級數

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots$$

微分  $n-1$  次，並令  $z \rightarrow a$ ，可得

$$(n-1)! a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}$$

故得證。

5.32 在所給的極點上，試求函數的留數。

證 (a)  $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ ； $z = 2, i, -i$  均為單極點，故

$$\text{在 } z = 2 \text{ 的留數為 } \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \left\{ \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)} \right\} = \frac{4}{5}$$

$$\text{在 } z = i \text{ 的留數為 } \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \left\{ \frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)} \right\} = \frac{i^2}{(i-2)(2i)} = \frac{1-2i}{10}$$

$$\text{在 } z = -i \text{ 的留數為 } \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \left\{ \frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)} \right\} = \frac{i^2}{(-i-2)(-2i)} = \frac{1+2i}{10}$$

(b)  $\frac{1}{z(z+2)^3}$ ;  $z=0, -2$   $z=0$  為單極點,  $z=-2$  為 3 階極點, 故

$$\text{在 } z=0 \text{ 的留數為 } \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{在 } z=-2 \text{ 的留數為 } \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ (z+2)^3 \cdot \frac{1}{z(z+2)^3} \right\} \\ = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1}{2} \left( \frac{2}{z^3} \right) = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

這些留數亦可由洛冉級數中,  $1/z$  及  $1/(z+2)$  的係數求得 (見 30 題 (e))。

(c)  $\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$ ;  $z=3$ , 為 2 階極點或雙重極點, 故:

$$\begin{aligned} \text{留數為 } \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} \left\{ (z-3)^2 \cdot \frac{ze^{zt}}{(z-3)^2} \right\} &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} (ze^{zt}) = \lim_{z \rightarrow 3} (e^{zt} + zte^{zt}) \\ &= e^{3t} + 3te^{3t} \end{aligned}$$

(d)  $\cot z$ ;  $z=5\pi$ , 為 1 階極點, 故

$$\begin{aligned} \text{留數為 } \lim_{z \rightarrow 5\pi} (z-5\pi) \cdot \frac{\cos z}{\sin z} &= \left( \lim_{z \rightarrow 5\pi} \frac{z-5\pi}{\sin z} \right) \left( \lim_{z \rightarrow 5\pi} \cos z \right) = \left( \lim_{z \rightarrow 5\pi} \frac{1}{\cos z} \right) (-1) \\ &= (-1)(-1) = 1 \end{aligned}$$

其中我們用到了羅哈士比托規則, 因其可被證明亦適用於複變函數。

5.33 若  $f(z)$  除了在封閉曲線  $C$  內的某些極點  $a, b, c, \dots$  以外, 在其餘各點 (封閉曲線  $C$  及其內部) 均為可解析, 證明

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \{ f(z) \text{ 在極點 } a, b, c, \dots \text{ 的留數之和} \}$$

參見圖 5-13。

證 利用和 20 題相同的推論方法 (即建立由  $C$  至  $C_1, C_2, C_3, \dots$  的橫切) 可得

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots$$

對於極點  $a$ ,

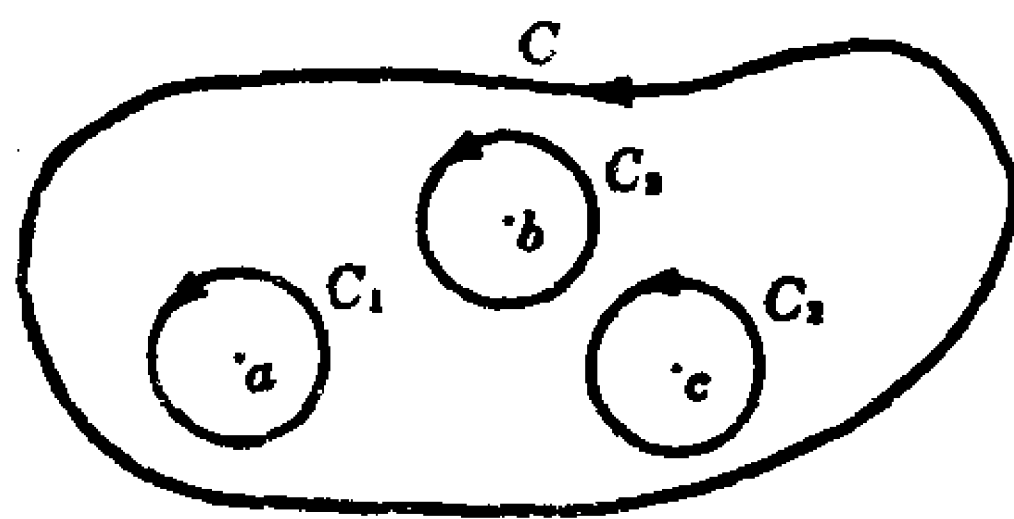


圖 5-13

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

故由 31 題,  $\oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$

同理, 對於極點  $b$ ,  $f(z) = \frac{b_{-n}}{(z-b)^n} + \cdots + \frac{b_{-1}}{(z-b)} + b_0 + b_1(z-b) + \cdots$

故  $\oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i b_{-1}$

以此類推, 可知

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1} + \cdots) = 2\pi i (\text{留數之和})$$

5.34 計算  $\oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2}$  其中  $C$  為 (a)  $|z| = 3/2$ , (b)  $|z| = 10$

在單極點  $z = 1$  的留數為  $\lim_{z \rightarrow 1} \left\{ (z-1) \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \right\} = \frac{e}{16}$

在單極點  $z = -3$  的留數為

$$\lim_{z \rightarrow -3} \frac{d}{dz} \left\{ (z+3)^2 \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \right\} = \lim_{z \rightarrow -3} \frac{(z-1)e^z - e^z}{(z-1)^2} = \frac{-5e^{-3}}{16}$$

(a) 因  $|z| = 3/2$  只包含極點  $z = 1$

$$\text{故所求積分值} = 2\pi i \left( \frac{e}{16} \right) = \frac{\pi i e}{8}$$

(b) 因  $|z| = 10$  包含兩極點  $z = 1$  及  $z = -3$

$$\text{故所求積分值} = 2\pi i \left( \frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16} \right) = \frac{\pi i (e - 5e^{-3})}{8}$$

### 定積分的計算

5.35 若當  $z = Re^{i\theta}$  時,  $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$  (其中

$k > 1$ ,  $M$  為常數), 證明  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$

$= 0$ , 其中  $\Gamma$  為半徑為  $R$  之半圓弧, 見圖 5-14。

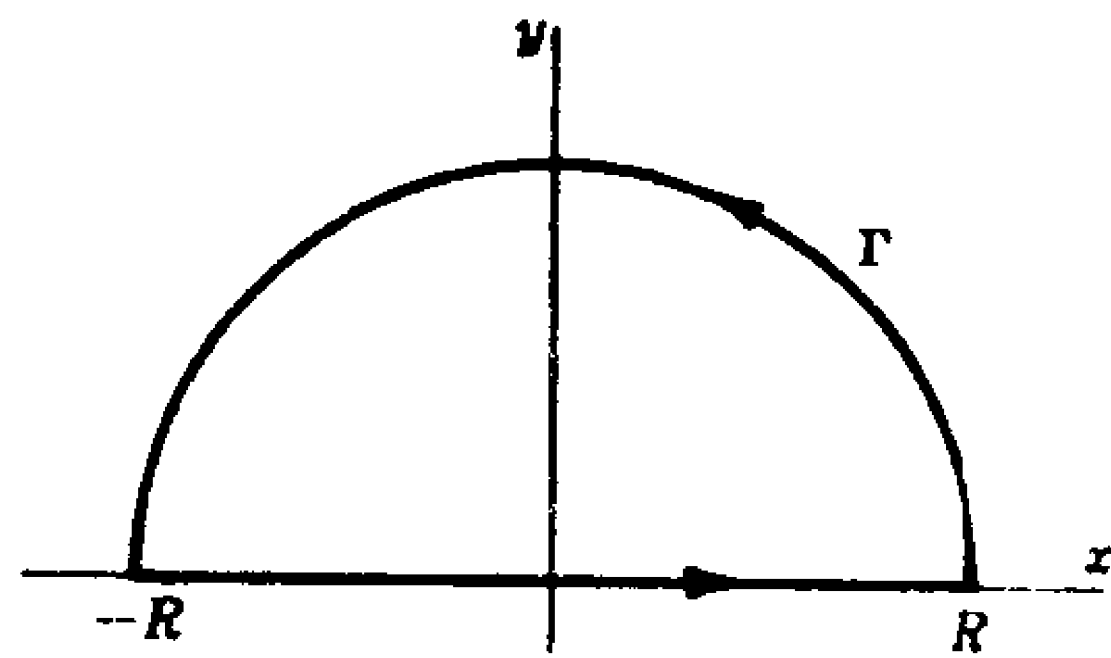


圖 5-14

圖 由(14)式，可得

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^k} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

但弧長  $L = \pi R$ ，

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = 0 \quad \text{即} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

5.36 證明當  $z = Re^{i\theta}$  時， $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ ， $k > 1$  其中  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$

圖 若  $z = Re^{i\theta}$ ， $|f(z)| = \left| \frac{1}{1+R^4 e^{4i\theta}} \right| \leq \frac{1}{|R^4 e^{4i\theta}| - 1} = \frac{1}{R^4 - 1} \leq \frac{2}{R^4}$  ( 假設  $R$  大至不等號

可成立，譬如說， $R > 2$  ) 故  $M = 2$ ， $k = 4$ 。

其中我們用到不等式  $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$  而  $z_1 = R^4 e^{4i\theta}$  且  $z_2 = 1$ 。

5.37 計算  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

圖 考慮  $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$ ，其中  $C$  為 35 題中的封閉曲線，乃是由  $-R$  至  $R$ ，及半圓  $\Gamma$  所構成，且積分路徑乃沿正（逆時鐘）方向。

因  $z^4+1=0$  之根為  $z = e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}$ ，此即為  $1/(z^4+1)$  的單極點。只有極點  $e^{\pi i/4}$  及  $e^{3\pi i/4}$  落於  $C$  之內部。利用羅哈士比托規則，

$$\begin{aligned} \text{在 } e^{\pi i/4} \text{ 的留數} &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \left\{ (z - e^{\pi i/4}) \frac{1}{z^4+1} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-3\pi i/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{在 } e^{3\pi i/4} \text{ 的留數} &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/4}} \left\{ (z - e^{3\pi i/4}) \frac{1}{z^4+1} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-9\pi i/4} \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left\{ \frac{1}{4} e^{-3\pi i/4} + \frac{1}{4} e^{-9\pi i/4} \right\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\text{即} \quad \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

在(2)式中，令  $R \rightarrow \infty$ ，並利用 36 題的結果，得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4 + 1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

但  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ ，故所求即為  $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

5.38 證明  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} = \frac{7\pi}{50}$

圖  $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)}$  之極點落於曲線  $C$  (35 題) 之內部者，為  $z = i$  (2 階) 及  $z = -1 + i$  (1 階)

在  $z = i$  之留數為  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left\{ (z - i)^2 \frac{z^2}{(z + i)^2 (z - i)^2 (z^2 + 2z + 2)} \right\} = \frac{9i - 12}{100}$

在  $z = -1 + i$  之留數為  $\lim_{z \rightarrow -1 + i} (z + 1 - i) \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z + 1 - i)(z + 1 + i)} = \frac{3 - 4i}{25}$

故  $\oint_C \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)} = 2\pi i \left\{ \frac{9i - 12}{100} + \frac{3 - 4i}{25} \right\} = \frac{7\pi}{50}$

即  $\int_{-R}^R \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} + \int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)} = \frac{7\pi}{50}$

令  $R \rightarrow \infty$ ，則第二積分式趨近於零 (見 35 題)，故得證。

5.39 計算  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta}$

圖 令  $z = e^{i\theta}$ ，則  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ ， $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$

故  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{5 + 3 \left( \frac{z - z^{-1}}{2i} \right)} = \oint_C \frac{2 dz}{3z^2 + 10iz - 3}$

其中  $C$  為以原點為圓心的單位圓，如圖 5-15 所示。

$\frac{2}{3z^2 + 10iz - 3}$  之極點為單極點為

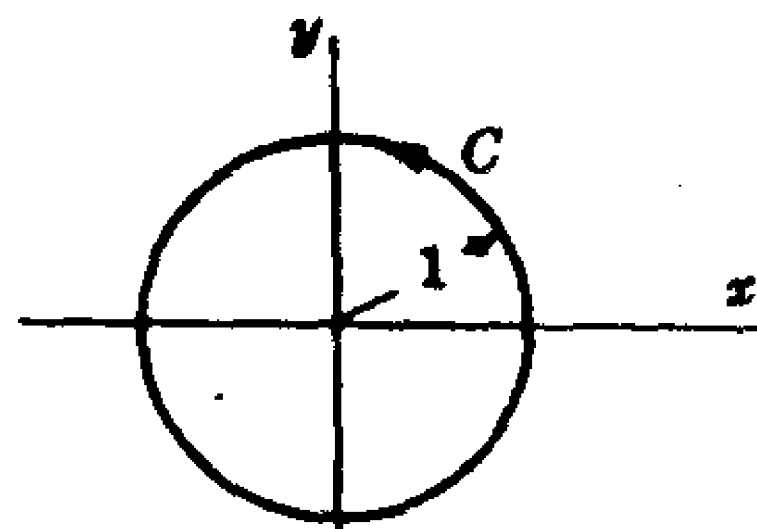


圖 5-15

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{-10i \pm \sqrt{-100 + 36}}{6} \\
 &= \frac{-10i \pm 8i}{6} \\
 &= -3i, -i/3.
 \end{aligned}$$

只有  $-i/3$  落於  $C$  內部

$$\text{在 } -i/3 \text{ 的留數 } \lim_{z \rightarrow -i/3} \left( z + \frac{i}{3} \right) \left( \frac{2}{3z^2 + 10iz - 3} \right) = \lim_{z \rightarrow -i/3} \frac{2}{6z + 10i} = \frac{1}{4i}$$

(利用羅哈士比托規則)

$$\text{故 } \oint_C \frac{2 dz}{3z^2 + 10iz - 3} = 2\pi i \left( \frac{1}{4i} \right) = \frac{\pi}{2}, \text{ 爲所求之值}$$

$$5.40 \text{ 證明 } \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{圈 若 } z = e^{i\theta} \text{ 則, } \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \cos 3\theta = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, dz = iz d\theta$$

$$\text{故 } \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \oint_C \frac{(z^3 + z^{-3})/2}{5 - 4 \left( \frac{z + z^{-1}}{2} \right)} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz$$

其中  $C$  爲 39 題中的曲線。

原式在  $C$  內部有 3 階極點  $z = 0$  及單極點  $z = 1/2$ 。

$$\text{在 } z = 0 \text{ 的留數爲 } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ z^3 \cdot \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} \right\} = \frac{21}{8}$$

$$\text{在 } z = 1/2 \text{ 的留數爲 } \lim_{z \rightarrow 1/2} \left\{ (z - 1/2) \cdot \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} \right\} = -\frac{65}{24}$$

$$\text{故 } -\frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz = -\frac{1}{2i} (2\pi i) \left\{ \frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right\} = \frac{\pi}{12} \quad \text{得證。}$$

5.41 若當  $z = Re^{i\theta}$  時,  $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$  (其中  $k > 0$ ,  $M$  爲常數), 證明

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{imz} f(z) dz = 0$$

其中  $\Gamma$  爲 35 題中的半圓弧, 且  $m$  爲常數 ( $m > 0$ )。



$$\begin{aligned}
\text{若 } z = Re^{i\theta}, \quad \int_{\Gamma} e^{imz} f(z) dz &= \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \\
\text{則 } \left| \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^\pi \left| e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} \right| d\theta \\
&= \int_0^\pi \left| e^{imR \cos \theta - mR \sin \theta} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} \right| d\theta \\
&= \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} |f(Re^{i\theta})| R d\theta \\
&\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta
\end{aligned}$$

因當  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  時,  $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$  (見第七章, 第3題), 故最後一個積分式將小或等於

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi M}{mR^k} (1 - e^{-mR})$$

因  $m, k$  均大於零, 故當  $R \rightarrow \infty$  時, 上式趨近於零, 故原式得證。

5.42 證明  $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \quad m > 0$

圖 考慮  $\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz$  其中  $C$  為 35 題中的路徑。

原式在  $z = \pm i$  為單極點, 但只有  $z = i$  落於  $C$  之內部。

$$\text{在 } z = i \text{ 的留數為 } \lim_{z \rightarrow i} \left\{ (z-i) \frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)} \right\} = \frac{e^{-m}}{2i}$$

$$\text{故 } \oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = 2\pi i \left( \frac{e^{-m}}{2i} \right) = \pi e^{-m}$$

$$\text{即 } \int_{-R}^R \frac{e^{imx}}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = \pi e^{-m}$$

$$\text{展開得 } \int_{-R}^R \frac{\cos mx}{x^2+1} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin mx}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = \pi e^{-m}$$

$$\text{所以 } 2 \int_0^R \frac{\cos mx}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = \pi e^{-m}$$

令  $R \rightarrow \infty$ , 則沿  $\Gamma$  的積分趨近於零 (見 41 題), 故得證。

5.43 證明  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

圖 由 42 題的方法，使我們考慮將  $e^{iz}$  沿 35 題的路徑積分。但  $z = 0$  亦在積分路徑上，但我們無法在奇點積分，所以積分路徑必須繞過  $z = 0$  這一點，如圖 5-16 所示，此路徑  $ABDEFGHJA$  稱為  $C'$ 。

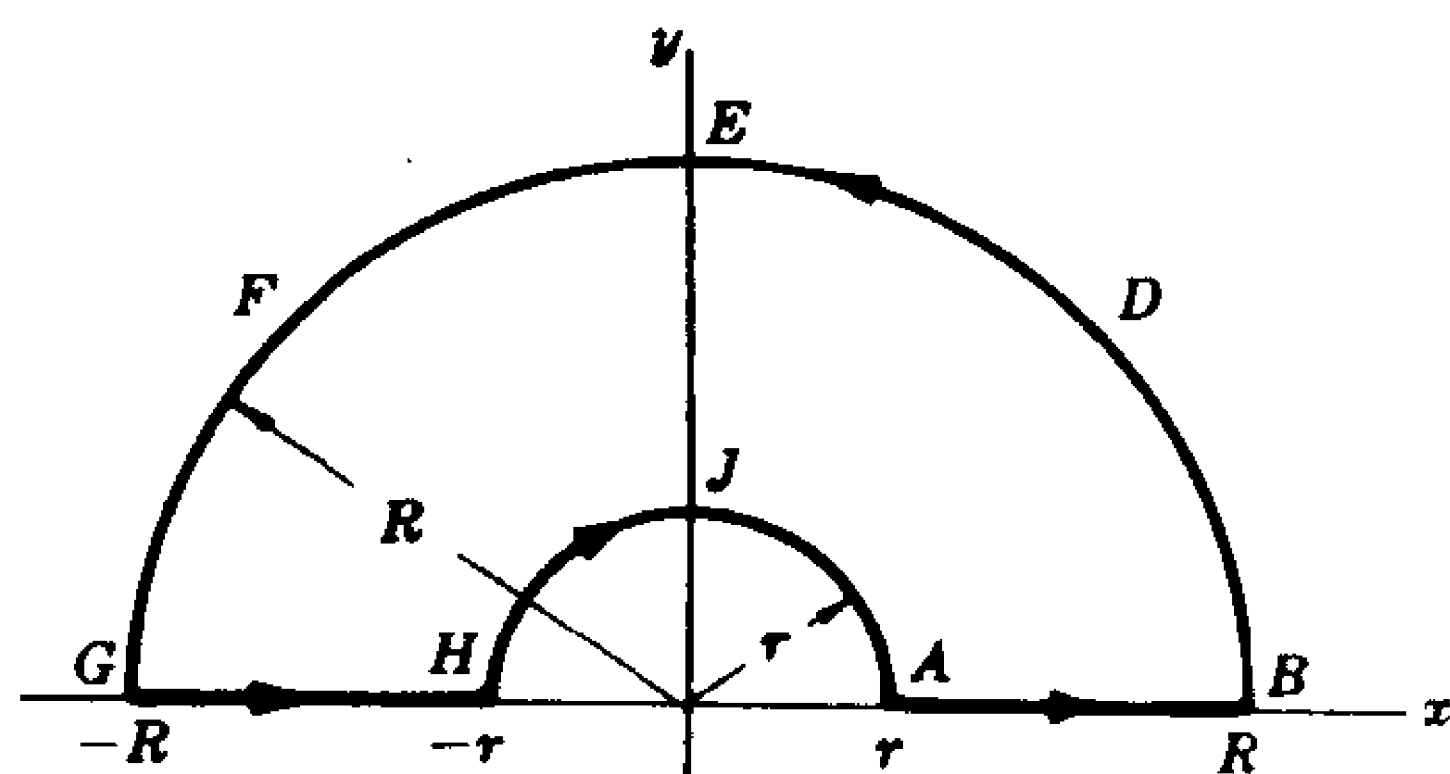


圖 5-16

因  $z = 0$  落於  $C'$  之外部，故

$$\int_{C'} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

$$\text{即} \quad \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

於第一積分式中，以  $-x$  取代  $x$ ，然後和第三積分式合併，可得

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

$$\text{即} \quad 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

令  $r \rightarrow 0$  且  $R \rightarrow \infty$ ，則由 41 題可知，等號右端的第二積分式趨近於零。由於積分號可和極限符號對調，故等號右端的第一積分式變為

$$- \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 ie^{ire^{i\theta}} d\theta = \pi i$$

$$\text{故得} \quad \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \pi i \quad \text{即} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

### 其他各類問題

- 5.44 定義自  $z$  平面 ( $xy$  平面) 至  $w$  平面 ( $uv$  平面) 的變換  $w = z^2$ 。考慮在  $z$  平面的三角形，頂點為  $A(2, 1)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $C(4, 3)$ ，(a) 證明此三角形在  $w = z^2$  作用之下的像 (Image) 或映象 (Mapping) 為  $uv$  平面上的曲線三角形 (Curvilinear triangle) (b) 求此曲線三角形的各個內角大小，並和原三角形比較。

圖 (a) 因  $w = z^2$ , 故  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$  為變換方程式。在  $xy$  平面上的點  $A(2, 1)$  映至  $uv$  平面上的點  $A'(3, 4)$  (見下圖)。同理, 點  $B$  及點  $C$  分別映至點  $B'$  及點  $C'$ 。三角形  $ABC$  的線段  $AC$ ,  $BC$ ,  $AB$ , 分別映至曲線三角形  $A'B'C'$  的拉物線段  $A'C'$ ,  $B'C'$ ,  $A'B'$ , 其方程式見圖 5-17(a) 及 (b)。

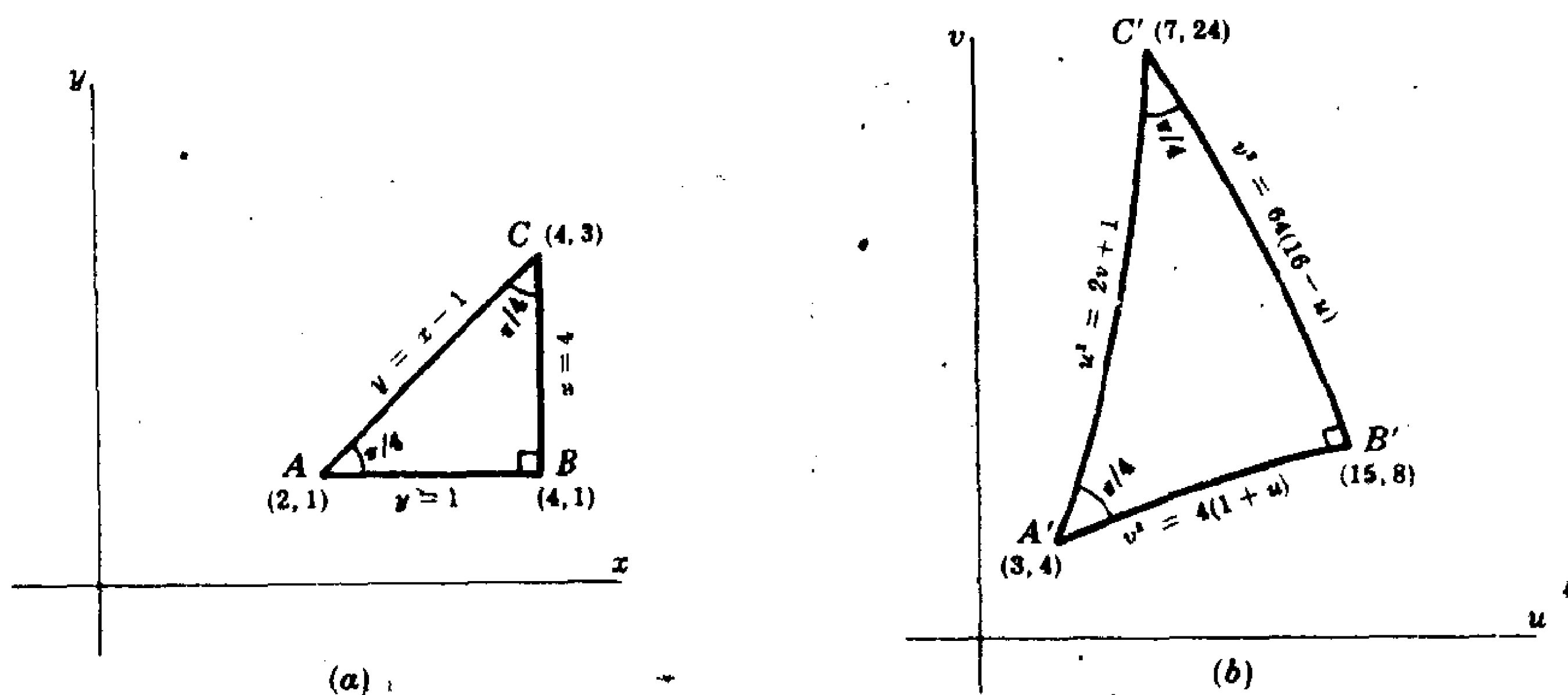


圖 5-17

(b) 曲線  $v^2 = 4(1+u)$  在  $(3, 4)$  的切線斜率為  $m_1 = \left. \frac{dv}{du} \right|_{(3,4)} = \frac{2}{v} \Big|_{(3,4)} = \frac{1}{2}$

曲線  $u^2 = 2v+1$  在  $(3, 4)$  的切線斜率為  $m_2 = \left. \frac{dv}{du} \right|_{(3,4)} = u = 3$

故此兩曲線在  $A'$  點形成之角度  $\theta$  為

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + (3)(\frac{1}{2})} = 1, \quad \text{即 } \theta = \pi/4$$

同理可得  $A'C'$  及  $B'C'$  形成之角度為  $\pi/4$ , 而  $A'B'$  及  $B'C'$  形成之角度為  $\pi/2$ 。故曲線三角形的各個內角和原三角形相同。一般而言, 若  $w = f(z)$  為一變換, 且  $f(z)$  為解析, 則只要  $f'(z_0) \neq 0$ , 那麼在  $z$  平面相交於  $z_0$  的兩曲線形成之夾角, 經  $f(z)$  作用後, 其影像之夾角不變 (大小及方向均不變), 此稱為解析函數的保角性質 (Conformal property), 故  $f(z)$  亦稱為保角轉換 (Conformal transformation) 或保角映象函數 (Conformal mapping function)。

5.45 令  $w = \sqrt{z}$  為自  $z$  平面至  $w$  平面的變換。有一點沿著單位圓  $|z| = 1$  反時鐘方向移動, 證明: 當此點第一次回到起點時, 其象點尚未到達起點, 而當此點第二次回到起點時, 其象點才第一次到達起點。

圖 令  $z = e^{i\theta}$ , 則  $w = \sqrt{z} = e^{i\theta/2}$ , 設  $\theta = 0$  代表起點, 即  $z = 1$  且  $w = 1$  (對應

於圖 5-18 (a) 及 (b) 的  $A$  和  $P$  點 )。

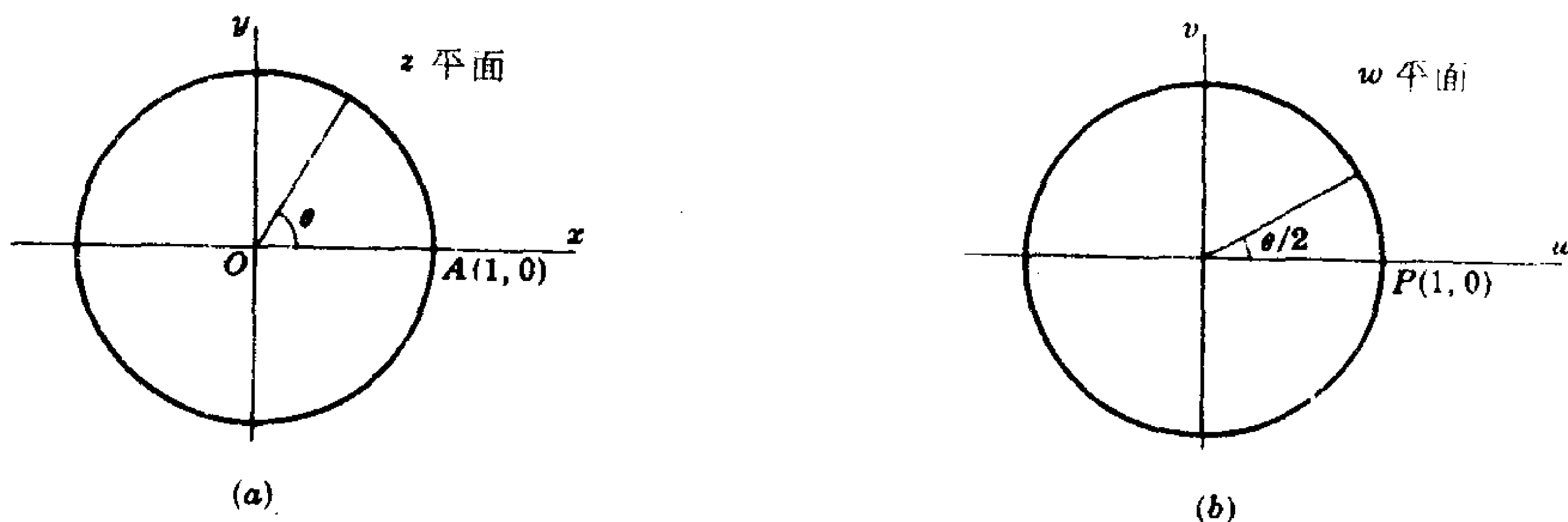


圖 5-18

當在  $z$  平面繞完第一圈時， $\theta = 2\pi$ ， $z = 1$ ，但  $w = e^{i\theta/2} = e^{i\pi} = -1$ ，即其像點尚未回到起點。

然而，當在  $z$  平面繞完第二圈時， $\theta = 4\pi$ ， $z = 1$ ，而  $w = e^{i\theta/2} = e^{i2\pi} = 1$ ，故其像點第一次回到起點。

由上可知， $w$  並非是  $z$  的單值函數，而是  $z$  的雙值函數 (Double-valued function)，亦即給定一個  $z$ ，則有兩個  $w$  值與之對應。若我們限制  $w$  為單值函數，則我們就必須限制  $\theta$  的範圍，例如，取  $0 < \theta < 2\pi$  (亦可取其他範圍)，這代表雙值函數  $w = \sqrt{z}$  的一個分枝 (Branch)。在此範圍之外，即  $2\pi < \theta < 4\pi$ ，這又代表  $w = \sqrt{z}$  的另一分枝。在旋轉開始點  $z = 0$  稱為分枝點 (Branch point)。或者我們可限制  $z$  值在繞  $|z| = 1$  時，不跨越  $Ox$  線，則  $f(z) = \sqrt{z}$  就成為單值函數。其中  $Ox$  稱為分枝線 (Branch line)。

5.46 證明  $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ ,  $0 < p < 1$

圖 考慮  $\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz$ 。因  $z = 0$  為分枝點，選積分路徑如圖 5-19 所示，其中  $AB$  及  $GH$  事實上已和  $x$  軸重合，為使圖形清晰，我們將它分開畫。

被積函數 (Integrand) 在  $C$  內部有一極點  $z = -1$

在  $z = -1 = e^{\pi i}$  的留數為

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^{p-1}}{1+z} = (e^{\pi i})^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}$$

故  $\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$

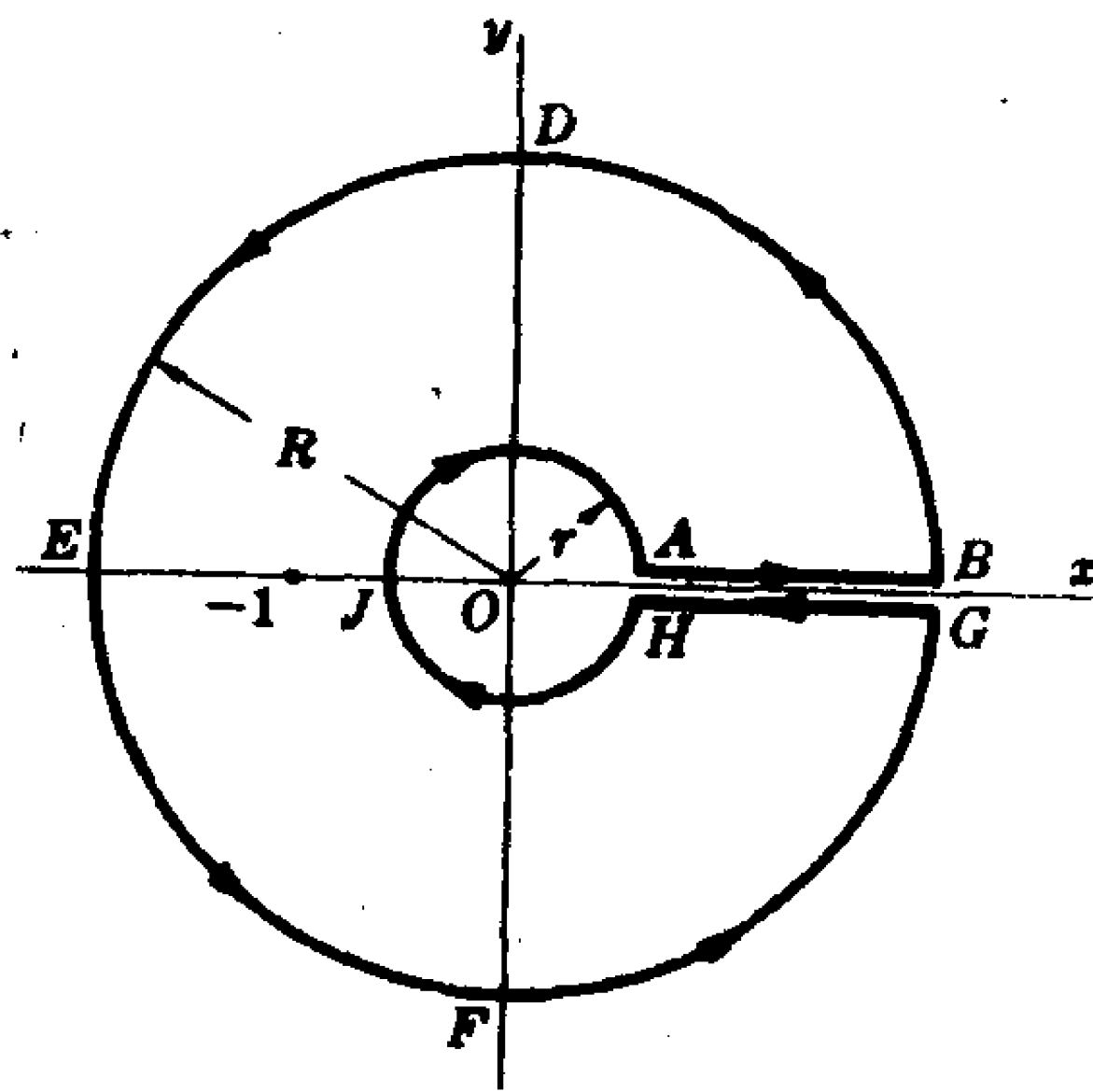


圖 5-19

暫時省略被積函數不寫，得

$$\int_{AB} + \int_{BDEFG} + \int_{GH} + \int_{HJA} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

故

$$\int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1} iRe^{i\theta} d\theta}{1+Re^{i\theta}} + \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(re^{i\theta})^{p-1} ire^{i\theta} d\theta}{1+re^{i\theta}} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

其中在沿  $GH$  積分時， $z = xe^{2\pi i}$ （因經過  $BDEFG$  時， $z$  之幅角增加  $2\pi$ ）

令  $r \rightarrow 0$ ， $R \rightarrow \infty$ ，則第二及第四積分式趨近於零，故

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_\infty^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)} x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

即

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

$$\text{所以 } \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

## 補充題

### 複數、極式

5.47 執行下列運算

$$\begin{array}{lll} (a) 2(5-3i) - 3(-2+i) + 5(i-3) & (c) \frac{5}{3-4i} + \frac{10}{4+3i} & (e) \left| \frac{2-4i}{5+7i} \right|^2 \\ (b) (3-2i)^3 & (d) \left( \frac{1-i}{1+i} \right)^{10} & (f) \frac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)} \end{array}$$

圖 (a)  $1-4i$ , (b)  $-9-46i$ , (c)  $\frac{1}{5} - \frac{2}{3}i$ , (d)  $-1$ , (e)  $\frac{19}{17}$ , (f)  $\frac{18}{5} - \frac{2}{3}i$

5.48 若  $z_1, z_2$  為複數，證明 (a)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ , (b)  $|z_1^2| = |z_1|^2$  說明是否須加諸任何條件。

5.49 證明 (a)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , (b)  $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$ , (c)  $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ 。

5.50 求下列方程式之所有解  $2z^4 - 3z^3 - 7z^2 - 8z + 6 = 0$ 。圖  $3, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

5.51 若  $z_1, z_2$  在阿干圖 (Argand diagram) 中分別以  $P_1, P_2$  表示。連接  $OP_1$  及  $OP_2$ ，其中  $O$  為原點。證明  $z_1 + z_2$  可以點  $P_3$  表示，其中  $OP_3$  為以  $OP_1$  及  $OP_2$  為兩邊的平行四邊形的對角線。此稱為複數相加的平行四邊形法則 (Parallelogram law)。因為有此特性及其他各種性質，複數可視為平面上的向量 (vectors)。

5.52 說明 49 題不等式的幾何意義。

5.53 將下式表為極式 (a)  $3\sqrt{3} + 3i$ , (b)  $-2 - 2i$ , (c)  $1 - \sqrt{3}i$ , (d) 5, (e)  $-5i$

答 (a)  $6 \operatorname{cis} \pi/6$ , (b)  $2\sqrt{2} \operatorname{cis} 5\pi/4$ , (c)  $2 \operatorname{cis} 5\pi/3$ , (d)  $5 \operatorname{cis} 0$ , (e)  $5 \operatorname{cis} 3\pi/2$

5.54 計算 (a)  $[2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)][5(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)]$ , (b)  $\frac{12 \operatorname{cis} 16^\circ}{(3 \operatorname{cis} 44^\circ)(2 \operatorname{cis} 62^\circ)}$

答 (a)  $-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}i$ , (b)  $-2i$

5.55 求下列之方根值，並圖示：

(a)  $(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{1/3}$ , (b)  $(-1)^{1/5}$ , (c)  $(\sqrt{3} - i)^{1/3}$ , (d)  $i^{1/4}$

答 (a)  $2 \operatorname{cis} 15^\circ$ ,  $2 \operatorname{cis} 135^\circ$ ,  $2 \operatorname{cis} 255^\circ$ ,

(b)  $\operatorname{cis} 36^\circ$ ,  $\operatorname{cis} 108^\circ$ ,  $\operatorname{cis} 180^\circ = -1$ ,  $\operatorname{cis} 252^\circ$ ,  $\operatorname{cis} 324^\circ$

(c)  $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 110^\circ$ ,  $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 230^\circ$ ,  $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 350^\circ$

(d)  $\operatorname{cis} 22.5^\circ$ ,  $\operatorname{cis} 112.5^\circ$ ,  $\operatorname{cis} 202.5^\circ$ ,  $\operatorname{cis} 292.5^\circ$

5.56 若  $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$  且  $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$ ，證明 (a)  $z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2)$ , (b)  $z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)$ ，解釋其幾何意義。

## 函數，極限，連續性

5.57 描述下列軌跡 (a)  $|z + 2 - 3i| = 5$ , (b)  $|z + 2| = 2|z - 1|$ , (c)  $|z + 5| - |z - 5| = 6$ ，並圖示之。

答 (a) 圓  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ，圓心  $(-2, 3)$ ，半徑 5。

(b) 圓  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ，圓心  $(2, 0)$ ，半徑 2。

(c) 拋物線之一支  $x^2/9 - y^2/16 = 1$ ，其中  $x \geq 3$ 。

5.58 下列各式在  $z$  平面上所形成的區域為何？

(a)  $|z - 2 + i| \geq 4$ , (b)  $|z| \leq 3$ ,  $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ , (c)  $|z - 3| + |z + 3| < 10$

試圖示之。

答 (a) 圓  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$  的邊界及內部。

(b) 第一象限內，由  $x^2 + y^2 = 9$ ， $x$  軸， $y = x$  圍成之區域。

(c) 橢圓  $x^2/25 + y^2/16 = 1$  之內部。

5.59 將下列各函數表為  $u(x, y) + i v(x, y)$  之形式，其中  $u$ ,  $v$  為實數。

(a)  $z^3 + 2iz$ , (b)  $z/(3 + z)$ , (c)  $e^{z^2}$ , (d)  $\ln(1 + z)$

答 (a)  $u = x^3 - 3xy^2 - 2y$ ,  $v = 3x^2y - y^3 + 2x$

(b)  $u = \frac{x^2 + 3x + y^2}{x^2 + 6x + y^2 + 9}$ ,  $v = \frac{3y}{x^2 + 6x + y^2 + 9}$

(c)  $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$ ,  $v = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$

(d)  $u = \frac{1}{2} \ln \{(1 + x)^2 + y^2\}$ ,  $v = \tan^{-1} \frac{y}{1 + x} + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

5.60 證明(a)  $\lim_{z \rightarrow z_0} z^2 = z_0^2$ , (a)由定義可直接得出  $f(z) = z^2$  在  $z = z_0$  連續。

5.61 (a) 若  $z = w$  為  $z^5 = 1$  中, 不為 1 的一根, 證明所有根為  $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ 。

(b) 證明  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$

(c) 將(a), (b)之結論推廣到  $z^n = 1$

### 導式, 柯西-里曼方程式

5.62 (a) 若  $w = f(z) = z + \frac{1}{z}$ , 由定義直接求  $\frac{dw}{dz}$ 。

(b)  $f(z)$  在那個有限  $z$  值為不可解析?

答 (a)  $1 - 1/z^2$ , (b)  $z = 0$

5.63 給定函數  $w = z^4$  (a) 求出實函數  $u, v$  使得  $w = u + iv$  (b) 證明柯西-里曼函數在  $z$  平面上的所有有限  $z$  值均成立, (c) 證明  $u, v$  為諧和函數, (d) 求  $dw/dz$ 。

答 (a)  $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, v = 4x^3y - 4xy^3$  (d)  $4z^3$

5.64 證明  $f(z) = z|z|$  在任何點均不可解析。

5.65 證明  $f(z) = \frac{1}{z-2}$  在  $z \neq 2$  之任意點均為可解析。

5.66 若一解析函數之虛部為  $2x(1-y)$ , 求(a)實部(b)此函數。

答 (a)  $y^2 - x^2 - 2y + c$ , (b)  $2iz - z^2 + c$ , 其中  $c$  為實數。

5.67 求一解析函數, 其實部為  $e^{-x}(x \cos y + y \sin y)$ , 且  $f(0) = 1$ 。

答  $ze^{-z} + 1$

5.68 證明不存在解析函數, 使得其虛部為  $x^2 - 2y$ 。

5.69 求  $f(z)$ , 使得  $f'(z) = 4z - 3$  且  $f(1+i) = -3i$ 。答  $f(z) = 2z^2 - 3z + 3 - 4i$ 。

### 線積分

5.70 計算  $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)dx + (y-x)dy$  積分路徑為(a)拋物線  $y^2 = x$  (b)直線(c)自  $(1,1)$  至  $(1,2)$ , 再至  $(4,2)$  的直線(d)曲線  $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ 。

答 (a)  $34/3$ , (b)  $11$ , (c)  $14$ , (d)  $32/3$

5.71 計算  $\oint (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$ , 積分路徑為  $xy$  平面上的三角形, 其頂點為  $(0,0), (3,0), (3,2)$ , 且沿反時鐘方向積分。答  $12$ 。

5.72 計算上題之線積分, 但積分路徑改為圓心  $(0,0)$ , 半徑 4 之圓。

圖 64π

## 平面上之革忍定理，和路徑無關之線積分

5.73 驗證平面上之革忍定理： $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$ ，其中  $C$  為正方形，頂點為  $(0, 0)$ ， $(2, 0)$ ， $(2, 2)$ ， $(0, 2)$ 。答 積分值均為 8。

5.74 (a) 若  $C$  為任意簡單封閉曲線，其包圍之面積為  $A$ ，證明  $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$  均為常數)：

$$\oint_C (a_1 x + a_2 y + a_3) dx + (b_1 x + b_2 y + b_3) dy = (b_1 - a_2)A$$

(b) 在何種條件下，會使得上式積分值沿任何路徑  $C$  均為零？答 (b)  $a_2 = b_1$

5.75 求內擺線 (Hypocycloid)  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  所圍區域之面積。  
(提示：參數方程式為  $x = a \cos^3 t$ ， $y = a \sin^3 t$ ， $0 \leq t \leq 2\pi$ )。答  $3\pi a^2/8$

5.76 若  $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ ，證明  $\frac{1}{2} \oint x dy - y dx = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$ ，並解釋其意義。

5.77 (a) 驗證平面上的革忍定理： $\oint_C (x^3 - x^2 y) dx + x y^2 dy$ ，其中  $C$  為由同心圓  $x^2 + y^2 = 4$  及  $x^2 + y^2 = 16$  所圍區域的邊界 (b) 由革忍定理計算 71 題及 72 題。  
答 (a) 均為  $120\pi$ 。

5.78 (a) 證明  $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy$  之值和連接  $(1, 0)$  及  $(2, 1)$  之路徑無關。(b) 計算 (a) 之積分值。答 (b) 5。

## 積分，柯西定理，柯西積分公式

5.79 計算  $\int_{1-2i}^{3+i} (2z+3) dz$ ：

(a) 沿  $x = 2t+1$ ， $y = 4t^2 - t - 2$ ，其中  $0 \leq t \leq 1$ 。

(b) 沿連接  $1-2i$  及  $3+i$  的直線。

(c) 沿由  $1-2i$  至  $1+i$ ，再至  $3+i$  的直線。

答 均為  $17+19i$ 。

5.80 計算  $\int_C (z^2 - z + 2) dz$ ，其中  $C$  為單位圓  $|z|=1$  的上半部，且沿正方向積分。

答  $-14/3$ 。



5.81 計算  $\oint_C \frac{z dz}{2z-5}$ ，其中  $C$  為圓 (a)  $|z|=2$ , (b)  $|z-3|=2$  圖 (a) 0, (b)  $5\pi i/2$

5.82 計算  $\oint_C \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} dz$ ，其中  $C$  為 (a) 頂點為  $-1-i, -1+i, -3+i, -3-i$  之正方形，(b) 一圓  $|z+i|=3$ ，(c) 一圓  $|z|=\sqrt{2}$ 。圖 (a)  $-8\pi i/3$  (b)  $-2\pi i$  (c)  $2\pi i/3$

5.83 計算 (a)  $\oint_C \frac{\cos \pi z}{z-1} dz$ , (b)  $\oint_C \frac{e^z+z}{(z-1)^4} dz$ ，其中  $C$  為任意包含  $z=1$  的簡單封閉曲線。  
圖 (a)  $-2\pi i$  (b)  $\pi i e/3$

5.84 證明柯西積分公式。

(提示：利用導式之定義，並以數學歸納法證之)

### 級數及奇點

5.85 何種  $z$  值使得下列級數收斂？

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n!}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^n}{n+1}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! (z^2+2z+2)^{2n}$$

圖 (a) 所有  $z$  均可 (b)  $|z-i| < 1$  (c)  $z = -1 \pm i$

5.86 證明級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$  為 (a) 絕對收斂，(b) 當  $|z| \leq 1$  時，為一致收斂。

5.87 證明在滿足  $|z+i| < R < 2$  的任意圓 (半徑為  $R$ ) 內，級數  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n}$  為一致收斂。

5.88 找出下列各函數在有限  $z$  平面上的奇點，並指出其名稱。

$$(a) \frac{z-2}{(2z+1)^4}, \quad (b) \frac{z}{(z-1)(z+2)^2}, \quad (c) \frac{z^2+1}{z^2+2z+2}, \quad (d) \cos \frac{1}{z}, \quad (e) \frac{\sin(z-\pi/3)}{3z-\pi}, \quad (f) \frac{\cos z}{(z^2+4)^2}$$

圖 (a)  $z = -1/2$ ，4 階極點。 (d)  $z = 0$ ，本性奇點。

(b)  $z = 1$ ，單極點， $z = -2$ ，雙重極點。 (e)  $z = \pi/3$ ，可去奇點。

(c)  $z = -1 \pm i$ ，單極點。 (f)  $z = \pm 2i$ ，雙重極點。

5.89 求下列各函數的洛丹函數 (相對於所給定之奇點)，並指出奇點的名稱，及使級數收斂的  $z$  值範圍。

$$(a) \frac{\cos z}{z-\pi}; z=\pi \quad (b) z^2 e^{-1/z}; z=0 \quad (c) \frac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}; z=1$$

圖 (a)  $-\frac{1}{z-\pi} + \frac{z-\pi}{2!} - \frac{(z-\pi)^3}{4!} + \frac{(z-\pi)^5}{6!} - \dots$ ，單極點，所有的  $z \neq \pi$

(b)  $z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 - \frac{1}{5!}z^3 + \dots$ , 本性奇點, 所有的  $z \neq 0$

(c)  $\frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{7}{16(z-1)} + \frac{9}{64} - \frac{9(z-1)}{256} + \dots$ , 雙重極點,  $0 < |z-1| < 4$

## 留數及留數定理

5.90 求出下列各函數在其極點的留數：

(a)  $\frac{2z+3}{z^2-4}$ , (b)  $\frac{z-3}{z^3+5z^2}$ , (c)  $\frac{e^{zt}}{(z-2)^3}$ , (d)  $\frac{z}{(z^2+1)^2}$

答 (a)  $z=2$ ;  $7/4$ ,  $z=-2$ ;  $1/4$  (c)  $z=2$ ;  $\frac{1}{2}t^2 e^{2t}$   
(b)  $z=0$ ;  $8/25$ ,  $z=-5$ ;  $-8/25$  (d)  $z=i$ ;  $0$ ,  $z=-i$ ;  $0$

5.91 求出  $e^{zt} \tan z$  在單極點  $z = 3\pi/2$  的留數。答  $-e^{3\pi t/2}$

5.92 計算  $\oint_C \frac{z^2 dz}{(z+1)(z+3)}$ , 其中  $C$  為包含所有極點的簡單封閉曲線。答  $-8\pi i$

5.93 若  $C$  為包含  $z = \pm i$  的簡單封閉曲線, 證明

$$\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2} dz = \frac{1}{2}t \sin t$$

5.94 若  $f(z) = P(z)/Q(z)$ , 其中  $P(z)$  及  $Q(z)$  均為多項式, 且  $P(z)$  的次數至少比  $Q(z)$  少 2, 證明  $\oint_C f(z) dz = 0$ , 其中  $C$  包含了  $f(z)$  的所有極點。

## 定積分的計算

利用線積分, 驗證下列等式:

5.95  $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

5.100  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{\pi}{9}$

5.96  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6+a^6} = \frac{2\pi}{3a^5}$ ,  $a > 0$

5.101  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

5.97  $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{32}$

5.102  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

5.98  $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} dx = \frac{\pi}{3}$

5.103  $\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{8}$

$$5.99 \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^4 + a^4)^2} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} a^{-7}, \quad a > 0 \quad 5.104 \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \sin^2 \theta)^2} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$5.105 \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad 0 < a < 1$$

$$5.106 \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^3} = \frac{(2a^2 + b^2)\pi}{(a^2 - b^2)^{5/2}}, \quad a > |b|$$

$$5.107 \quad \int_0^\infty \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi e^{-4}}{4} \quad 5.110 \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi(2e - 3)}{4e}$$

$$5.108 \quad \int_0^\infty \frac{\cos 2\pi x}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi e^{-\pi}}{8} \quad 5.111 \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$5.109 \quad \int_0^\infty \frac{x \sin \pi x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{4} \quad 5.112 \quad \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}$$

5.113 考慮  $\oint_C \frac{e^{iz}}{\cosh z}$ ，其中  $C$  為頂點在  $(-R, 0)$ ,  $(R, 0)$ ,  $(R, \pi)$ ,  $(-R, \pi)$  的長方形，再令  $R \rightarrow \infty$  即得。

### 其他各類問題

5.114 若  $z = re^{i\theta}$  且  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ，其中  $r$  及  $\theta$  為極座標，證明柯西 - 里曼方程式為

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

5.115 定義一個自  $z$  平面變換至  $w$  平面的解析函數  $w = f(z)$ ，其中  $z = x + iy$ ， $w = u + iv$ ，證明此轉換之 亞克比行列式 (Jacobian of the transformation) 為

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2$$

5.116 若  $F(x, y)$  經  $w = f(z)$  之作用，變換成  $G(u, v)$ ，證明若  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ ，

則在  $f'(z) \neq 0$  之任意點，均有  $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = 0$

5.117 證明在雙線性變換 (Bilinear transformation)  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  (但  $ad - bc \neq 0$ )

的作用下， $z$  平面上的圓可變換成  $w$  平面上的圓。

5.118 若  $f(z)$  在圓  $|z-a|=R$  及其內部均為可解析，證明柯西不等式，即

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{R^n}$$

其中在圓上各點時， $|f(z)| \leq M$ 。[提示：利用柯西積分公式]

5.119  $c_1, c_2$  為圓心在  $a$ ，半徑分別是  $r_1, r_2$  的同心圓，其中  $r_1 < r_2$ 。若  $a+h$  為由  $c_1, c_2$  包圍之環狀區域中的任意點，且  $f(z)$  在此區域中為可解析，證明洛冉定理 (Laurent's theorem)。

$$f(a+h) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n h^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}$$

其中  $C$  為在環狀區域中，包含  $C_1$  的任意封閉曲線。

提示：寫成  $f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z) dz}{z-(a+h)} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z) dz}{z-(a+h)}$ ，將  $\frac{1}{z-a-h}$

以兩種不同方式展開。

5.120 求出  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$  的洛冉級數展開，且此級數在  $1 < |z| < 2$  時收斂，其餘地方則發散。

提示：寫成  $\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{-1}{z+1} + \frac{2}{z+2} = \frac{-1}{z(1+1/z)} + \frac{1}{1+z/2}$

答  $\cdots - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \cdots$



## 第六章

# 傅立葉級數及積分

### 6.1 傅立葉級數

若  $F(x)$  滿足下列條件：

1.  $F(x)$  定義於區間  $c < x < c + 2l$ 。
2.  $F(x)$  和  $F'(x)$  在  $c < x < c + 2l$  間均為分段連續。
3.  $F(x + 2l) = F(x)$ ，即  $F(x)$  之週期為  $2l$ 。

則在每個連續點上，可得

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

若在不連續點，則(1)式左端改為  $\frac{1}{2} \{ F(x+0) + F(x-0) \}$ ，即改為不連續點的左右平均值。

(1)式的級數（其係數為(2)）稱  $F(x)$  的傅立葉級數（Fourier series，簡稱傅氏級數）。在許多題目中， $c=0$  或  $-l$ 。若  $l=\pi$ ，則  $F(x)$  週期為  $2\pi$ ，(1)及(2)式將可簡化許多。

上述條件稱為狄里西雷條件（Dirichlet conditions），為傅氏級數收斂的充分條件（非必要條件）。

### 6.2 奇函數及偶函數

若  $F(-x) = -F(x)$ ，則函數  $F(x)$  為奇（Odd），如  $x^3$ ， $x^5 - 3x^3 + 2x$ ， $\sin x$ ， $\tan 3x$  等均為奇函數。

若  $F(-x) = F(x)$ ，則函數  $F(x)$  為偶 (Even)，如  $x^4$ ， $2x^6 - 4x^2 + 5$ ， $\cos x$ ， $e^x + e^{-x}$  等均為偶函數。

圖 6-1 及 6-2 分別是奇函數及偶函數，但圖 6-3 兩者都不是。

在奇函數的傅氏級數展開時，只有正弦項保留下來，而在偶函數的傅氏級數展開時，只有餘弦項 (可能包含一可被視為餘弦項的常數) 保留下來。

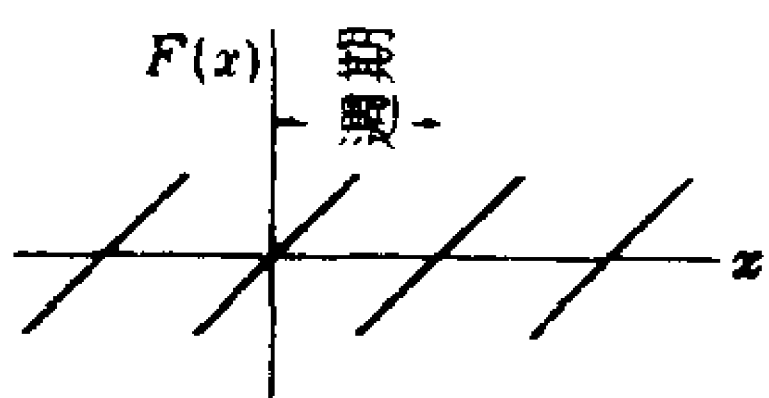


圖 6-1

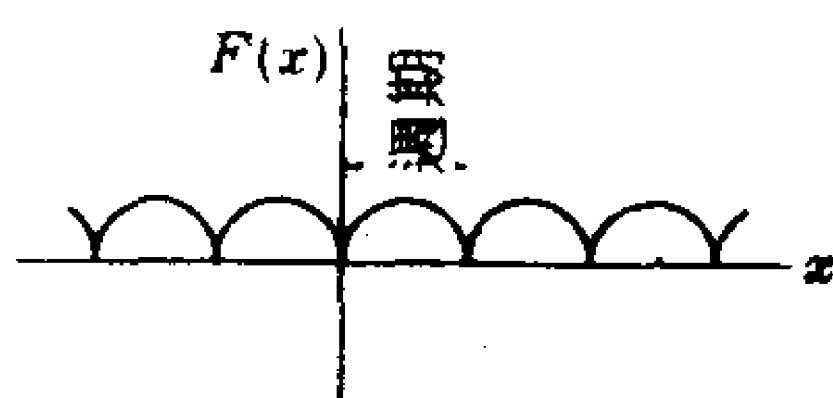


圖 6-2

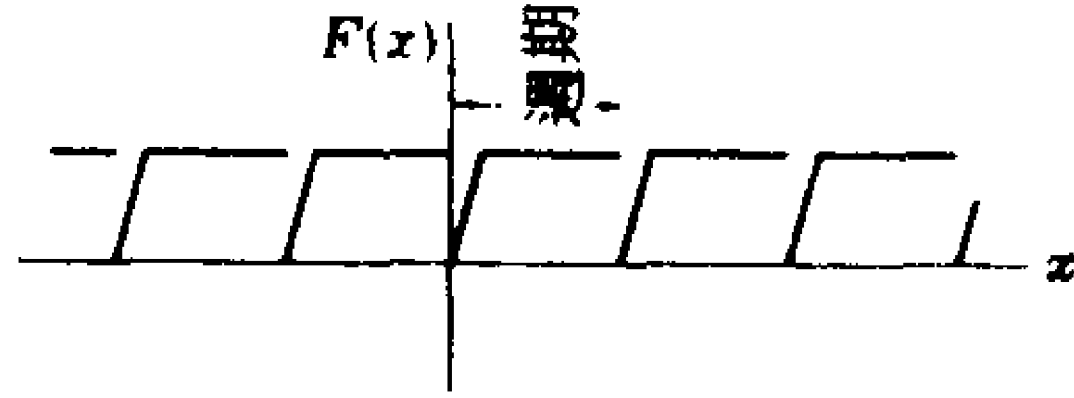


圖 6-3

### 6.3 半幅傅氏正弦及餘弦級數

在一傅氏級數中，若只出現正弦 (餘弦) 項，則稱之為半幅傅氏正弦 (餘弦) 級數。欲求所給函數的半幅級數，通常先在  $(0, l)$  間定義此函數 (因只在  $(0, l)$  間定義，為  $(-l, l)$  的一半，故稱半幅，Half range)，然後指明此函數為奇或偶，則即可知道在另一半區間  $(-l, 0)$  之函數定義為何。如下述

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx && \text{此為半幅正弦級數} \\ b_n &= 0, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx && \text{此為半幅餘弦級數} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

### 6.4 傅氏級數的複數形式

傅氏級數(1)及其係數(2)可以複數表示為

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l} \quad (4)$$

其中取  $c = -1$ ，

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) e^{-in\pi x/l} dx \quad (5)$$

參見 74 題。

### 6.5 傅氏級數的巴塞維恒等式

巴塞維恒等式 (Parseval's identity) 爲

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l \{F(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (6)$$

其中  $a_n$  及  $b_n$  均同(2)式。

一重要之結論爲

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

此稱爲里曼定理 (Riemann's theorem)。

### 6.6 有限傅氏變換

在  $0 < x < l$  ,  $F(x)$  的有限傅氏正弦變換 (Finite Fourier sine transform) 定義爲

$$f_s(n) = \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (8)$$

其中  $n$  爲整數。函數  $F(x)$  則稱爲  $f_s(n)$  的反有限傅氏正弦變換 (Inverse finite Fourier sine transform), 且等於

$$F(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (9)$$

在  $0 < x < l$  ,  $F(x)$  的有限傅氏餘弦變換 (Finite Fourier cosine transform) 定義爲

$$f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (10)$$

其中  $n$  爲整數。函數  $F(x)$  則稱爲  $f_c(n)$  的反有限傅氏餘弦變換 (Inverse finite Fourier cosine transform), 且等於

$$F(x) = \frac{1}{l} f_c(0) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (11)$$



參見 9 ~ 11 題。

有限傅氏變換可用於解微分方程式 ( 見 32 題 ) 。

## 6.7 傅氏積分

若  $F(x)$  滿足下列條件

1.  $F(x)$  在任何有限區間  $-l \leq x \leq l$  滿足狄里西雷條件。
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx$  收斂，即  $F(x)$  在  $-\infty < x < \infty$  間絕對可積 (Absolutely integrable)。

則傅氏積分定理 ( Fourier's integral theorem ) 為

$$F(x) = \int_0^{\infty} \{ A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x \} d\lambda \quad (12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos \lambda x dx \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sin \lambda x dx \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上式亦可寫成

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(x-u) du d\lambda \quad (14)$$

(12) 式對  $F(x)$  之所有連續點均成立。若  $x$  為不連續點，則如同在傅氏級數中一般，我們必需以  $\frac{1}{2} \{ F(x+0) + F(x-0) \}$  來代替  $F(x)$ 。對傅氏級數而言，上述條件為充分條件，但非必要條件。

(12) 及 (13) 和傅氏級數的 (1)，(2) 式非常相似。(12) 式右端有時稱為  $F(x)$  的傅氏積分展開 ( Fourier integral expansion )，或簡稱傅氏積分 ( Fourier integral )。

## 6.8 傅氏積分的複數形式

傅氏積分 (12) 及係數 (13) 可以複數表示為

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-i\lambda u} du \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i\lambda(x-u)} du d\lambda$$

參見 77 題。

## 6.9 傅立葉變換

由 (15) 式可知，若

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} F(u) du \quad (16)$$

則

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} f(\lambda) d\lambda \quad (17)$$

以  $x$  代  $u$ ，即可得  $F(x)$ 。

函數  $f(\lambda)$  稱為  $F(x)$  的傅立葉變換 (Fourier transform, 或簡稱傅氏變換)，寫成  $f(\lambda) = F\{F(x)\}$ 。函數  $F(x)$  稱為  $f(\lambda)$  的反傅立葉變換 (Inverse Fourier transform, 或簡稱反傅氏變換)，寫成  $F(x) = F^{-1}\{f(\lambda)\}$ 。(17) 式亦稱為 (16) 式的反變換公式 (Inversion formula)。

注意在積分符號前的常數，可為任意常數之乘積，只要其積為  $\frac{1}{2}\pi$  即可。若兩常數各為  $1/\sqrt{2\pi}$ ，則我們可得到所謂的對稱形式 (Symmetric form)。

## 6.10 傅立葉正弦及餘弦變換

在  $0 < x < \infty$  時， $F(x)$  的 (無限) 傅立葉正弦變換 ((Infinite) Fourier sine transform) 之定義如下：

$$f_s(\lambda) = \int_0^{\infty} F(u) \sin \lambda u du \quad (18)$$

函數  $F(x)$  則稱為  $f_s(\lambda)$  的反傅立葉正弦變換 (Inverse Fourier sine transform)，如下：

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda \quad (19)$$

在  $0 < x < \infty$  時， $F(x)$  的 (無限) 傅立葉餘弦變換 ((Infinite) Fourier cosine transform) 之定義如下：

$$f_c(\lambda) = \int_0^{\infty} F(u) \cos \lambda u du \quad (20)$$

## 220 第六章 傅立葉級數及積分

函數  $F(x)$  稱爲  $f_c(\lambda)$  的反傅立葉餘弦變換 (Inverse Fourier cosine transform), 如下

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda \quad (21)$$

參見 18 ~ 20 題。

傅氏變換亦可用於解微分方程式 (見 33 題)。

### 6.11 褶積定理

兩函數  $F(x)$  及  $G(x)$  之褶積 (Convolution) 定義如下 (其中  $-\infty < x < \infty$ ):

$$F * G = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) G(x-u) du = H(x) \quad (22)$$

一重要結論, 稱爲傅氏變換的褶積定理 (Convolution theorem for Fourier transforms), 如下:

定理 6.1: 若  $H(x)$  爲  $F(x)$  和  $G(x)$  的褶積, 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-i\lambda x} dx = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\lambda x} dx \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-i\lambda x} dx \right\} \quad (23)$$

$$\mathcal{F}\{F * G\} = \mathcal{F}\{F\} \mathcal{F}\{G\} \quad (24)$$

即  $F$  和  $G$  之褶積的傅氏變換, 等於  $F$  和  $G$  之傅氏變換的積。

### 6.12 傅氏積分中的巴塞維恒等式

若  $F(x)$  的傅氏變換爲  $f(\lambda)$ , 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\lambda \quad (25)$$

此稱爲傅氏積分中的巴塞維恒等式。此結論之推廣可參見 80 題。

### 6.13 傅氏變換和拉氏變換的關係

考慮函數

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \Phi(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (26)$$

故由(16)式，並以  $y$  取代  $\lambda$ ，可得  $F(t)$  的傅氏變換為

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t} \Phi(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(t) dt \quad (27)$$

其中  $s = x + iy$ 。(27)式的右端為  $\phi(t)$  的拉氏變換，故由此結論即可看出傅氏變換和拉氏變換的關係。由此亦可知可將  $s$  視為複數  $x + iy$ 。

若欲使兩者關係更明顯，見下述。若在  $t < 0$  時， $F(t)$  及  $G(t)$  均為零，則  $F$  和  $G$  的褶積，可由(22)式改寫為

$$F * G = \int_0^t F(u) G(t-u) du \quad (28)$$

再由(24)式

$$\mathcal{L}\{F * G\} = \mathcal{L}\{F\} \mathcal{L}\{G\} \quad (29)$$

故和(11)式符合。

因對於傅立葉變換而言，存在對應於(16)式的反變換公式(17)，故使人猜想到對於拉氏變換，是否有反變換公式。此種反變換公式可參見第七章。

## 附解題

### 傅立葉級數

6.1 證明  $\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 0$  其中  $k = 1, 2, 3, \dots$

答  $\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_{-l}^l = -\frac{l}{k\pi} \cos k\pi + \frac{l}{k\pi} \cos(-k\pi) = 0$

$$\int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_{-l}^l = \frac{l}{k\pi} \sin k\pi - \frac{l}{k\pi} \sin(-k\pi) = 0$$

6.2 證明 (a)  $\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \end{cases}$

(b)  $\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0$

其中  $m, n$  為  $1, 2, 3, \dots$  中之任意值。

答 (a) 由三角恆等式  $\cos A \cos B = \frac{1}{2} \{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$ ,  $\sin A \sin B = \frac{1}{2} \{\cos(A-B) -$

$$\cos(A+B)\}$$

若  $m \neq n$ ，則由第 1 題得

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left\{ \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} \right\} dx = 0$$

同理若  $m \neq n$ ，則

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left\{ \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} \right\} dx = 0$$

若  $m = n$ ，則

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left( 1 + \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx = l$$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left( 1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx = l$$

若  $m = n = 0$ ，則上式積分分別為  $2l$  及  $0$ 。

(b) 因  $\sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A-B) + \sin(A+B) \}$ ，故由第 1 題，若  $m \neq n$ ，則

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left\{ \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} + \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \right\} dx = 0$$

若  $m = n$ ，則

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin \frac{2n\pi x}{l} dx = 0$$

若積分上下限由  $-l, l$  改為  $c, c+2l$ ，則(a)(b)中的結論仍相同。

6.3 若級數  $A + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$  在  $(-l, l)$  中一致收斂至  $f(x)$ ，證明

當  $n = 1, 2, 3, \dots$ ，時

$$(a) a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (b) b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (c) A = \frac{a_0}{2}$$

證 (a)

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

將上式乘上  $\cos \frac{m\pi x}{l}$  並自  $-l$  至  $l$  積分之，且利用第 2 題，得

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx &= A \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} \\ &= a_m l \quad \text{其中 } m \neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

故 
$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx \quad \text{其中 } m = 1, 2, 3, \dots$$

(b) 將(1)式乘上  $\sin \frac{m\pi x}{l}$  並自  $-l$  至  $l$  積分之，且利用第 2 題，得

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx &= A \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} \\ &= b_m l \end{aligned} \quad (3)$$

故 
$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad \text{其中 } m = 1, 2, 3, \dots$$

(c) 將(1)式從  $-l$  至  $l$  積分之，並利用第 1 題，得

$$\int_{-l}^l F(x) dx = 2Al \quad \text{即} \quad A = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx$$

令  $m = 0$  代入(a)之結論，得  $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx$  故  $A = \frac{a_0}{2}$

若積分範圍由  $-l, l$  改為  $c, c+2l$ ，則上述結論仍然不變。

因我們假設以上之級數在  $(-l, l)$  間會一致收斂至  $F(x)$ ，故在以上的推導過程中 求和及積分號的前後對調均可行。若以上假設並未成立，則上面所得之係數  $a_m$  及  $b_m$ ，仍稱為相對  $F(x)$  之傅立葉係數 (Fourier coefficient)，而以  $a_m$  及  $b_m$  為係數之級數，仍稱為相對  $F(x)$  之傅立葉級數 (Fourier series)。在此種情況下，有一很重要的課題，即探討在何種條件下，此級數會確實收斂至  $F(x)$ 。收斂之充分條件為狄里西雷條件 (Dirichlet conditions)，以下將會提到 (見 12 ~ 17 題)。

6.4 (a) 求出相對於下列方程式的傅立葉係數。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \quad \text{週期} = 10$$

(b) 寫出其傅氏級數。

(c)  $F(x)$  在  $x = -5$ ， $x = 0$  及  $x = 5$  應如何定義，才能使傅立葉級數在  $-5 \leq x \leq 5$  間收斂至  $F(x)$ ？

圖  $F(x)$  之圖形如圖 6-4 所示。

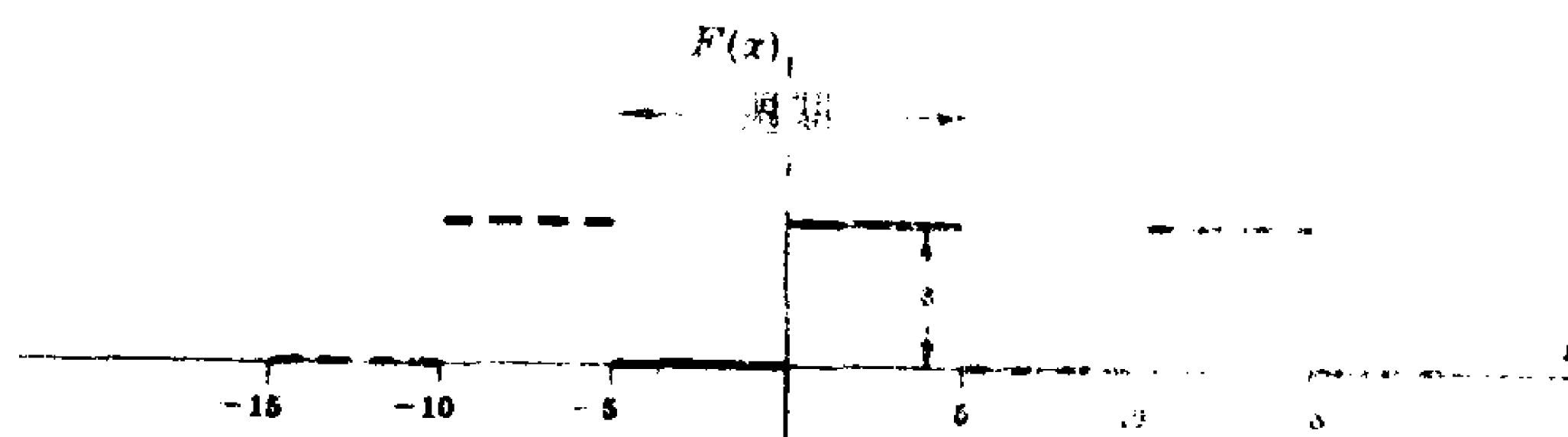


圖 6-4

- (a) 週期  $= 2l = 10$  且  $l = 5$ ，取積分範圍  $c$  及  $c + 2l$  分別為  $-5$  及  $5$ ，故  $c = -5$ ，則

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 F(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 (0) \cos \frac{n\pi x}{5} dx + \int_0^5 (3) \cos \frac{n\pi x}{5} dx \right\} = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{3}{5} \left( \frac{5}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 = 0 \quad \text{其中 } n \neq 0. \end{aligned}$$

$$\text{若 } n = 0, \quad a_n = a_0 = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{0\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 dx = 3.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 F(x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 (0) \sin \frac{n\pi x}{5} dx + \int_0^5 (3) \sin \frac{n\pi x}{5} dx \right\} = \frac{3}{5} \int_0^5 \sin \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{3}{5} \left( -\frac{5}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 = \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \end{aligned}$$

- (b) 對應之傅立葉級數為

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) &= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{5} + \dots \right) \end{aligned}$$

- (c) 由於  $F(x)$  滿足狄里西雷條件，故在所有連續點，級數收斂至  $F(x)$ ，而在有不連續點，級數收斂至  $\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$ 。在不連續點  $x = -5, 0$  及  $5$ ，級數收斂至  $(3+0)/2 = 3/2$ ，可由圖中看出。若我們將  $F(x)$  重新定義如下：

$$F(x) = \begin{cases} 3/2 & x = -5 \\ 0 & -5 < x < 0 \\ 3/2 & x = 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \\ 3/2 & x = 5 \end{cases} \quad \text{週期} = 10$$

則此級數在  $-5 \leq x \leq 5$  間均會收斂至  $F(x)$ 。

6.5 將  $F(x) = x^2$ ,  $0 < x < 2\pi$  展開成傅立葉級數, 但 (a) 週期為  $2\pi$  (b) 週期未指定。

圖 (a) 週期為  $2\pi$  的  $F(x)$  圖形如圖 6-5 所示。

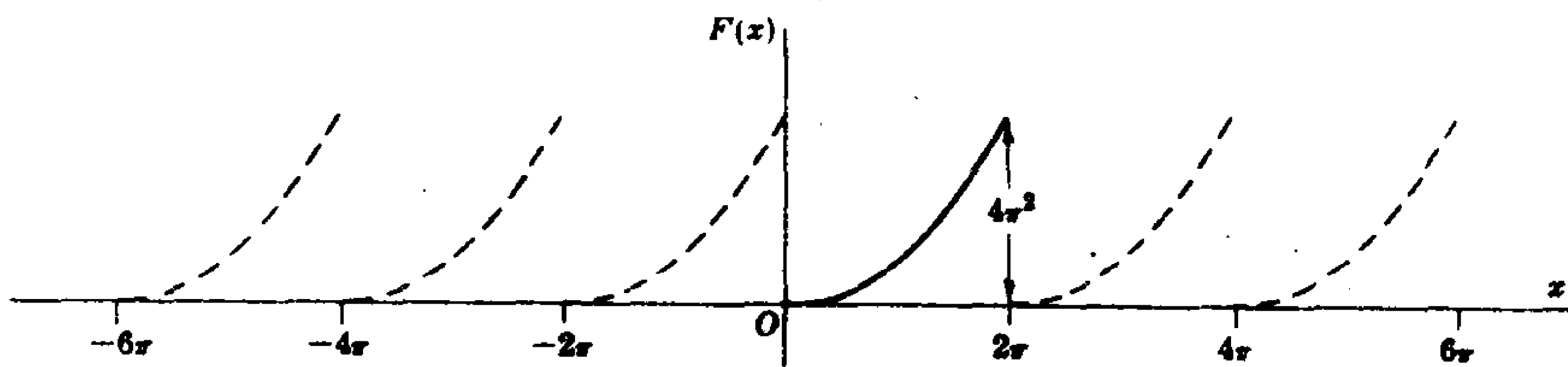


圖 6-5

週期  $= 2l = 2\pi$  故  $l = \pi$ , 取  $c = 0$ , 得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ (x^2) \left( \frac{\sin nx}{n} \right) - (2x) \left( \frac{-\cos nx}{n^2} \right) + 2 \left( \frac{-\sin nx}{n^3} \right) \right\} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}, \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{若 } n = 0, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ (x^2) \left( -\frac{\cos nx}{n} \right) - (2x) \left( -\frac{\sin nx}{n^2} \right) + (2) \left( \frac{\cos nx}{n^3} \right) \right\} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n} \end{aligned}$$

$$\text{故 } F(x) = x^2 = \frac{4x^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right).$$

上式對  $0 < x < 2\pi$  均有效。在  $x = 0$  及  $x = 2\pi$  時, 上面級數收斂至  $2\pi^2$ 。

(b) 若週期未指定, 則一般而言, 無法唯一決定傅立葉級數。

### 奇函數及偶函數, 半幅傅氏正弦及餘弦級數

6.6 若  $F(x)$  為偶, 證明 (a)  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ , (b)  $b_n = 0$

$$\text{圖 (a) } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

令  $x = -u$ ,



$$\frac{1}{l} \int_{-l}^0 F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^l F(-u) \cos \left( \frac{-n\pi u}{l} \right) du = \frac{1}{l} \int_0^l F(u) \cos \frac{n\pi u}{l} du$$

由定義知偶函數滿足  $f(-u) = f(u)$ ，故

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^l F(u) \cos \frac{n\pi u}{l} du + \frac{1}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$(b) \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (1)$$

令  $x = -u$  代入(1)式右端之第一積分式，得

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_{-l}^0 F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{1}{l} \int_0^l F(-u) \sin \left( \frac{-n\pi u}{l} \right) du = -\frac{1}{l} \int_0^l F(-u) \sin \frac{n\pi u}{l} du \quad (2) \\ &= -\frac{1}{l} \int_0^l F(u) \sin \frac{n\pi u}{l} du = -\frac{1}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

其中我們利用到偶函數的性質  $F(-u) = F(u)$ ，且在最後一步驟中，積分之虛擬變數 (Dummy variable)  $u$  可用任何其他符號代入，故以  $x$  取代  $u$ 。故由(1)式，並利用(2)式，我們可得

$$b_n = -\frac{1}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$$

6.7 將  $F(x) = x$ ， $0 < x < 2$  展開成半幅之(a)正弦級數(b)餘弦級數。

圖 (a) 將所給函數之定義，擴展成週期為4的奇函數，如圖6-6所示。此稱為  $F(x)$  的奇擴展 (Odd extension)。故  $2l = 4$ ， $l = 2$ 。

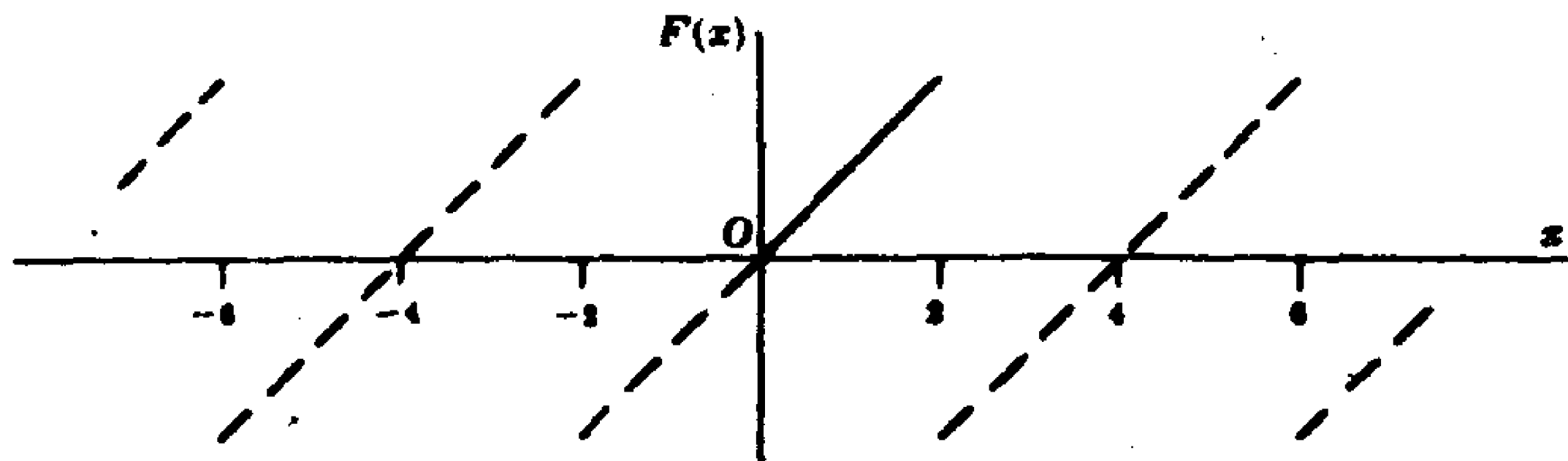


圖 6-6

因此  $a_n = 0$  且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \left\{ (x) \left( \frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) - (1) \left( \frac{-4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \right\} \bigg|_0^2 = \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2} \\
 &= -\frac{4}{\pi^2} \left( \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \dots \right)
 \end{aligned}$$

(b) 將  $F(x)$  之定義擴展為週期 4 的偶函數，如圖 6-7 所示。此稱為  $F(x)$  的偶擴展 (Even extension)，則  $2l=4$ ， $l=2$ 。

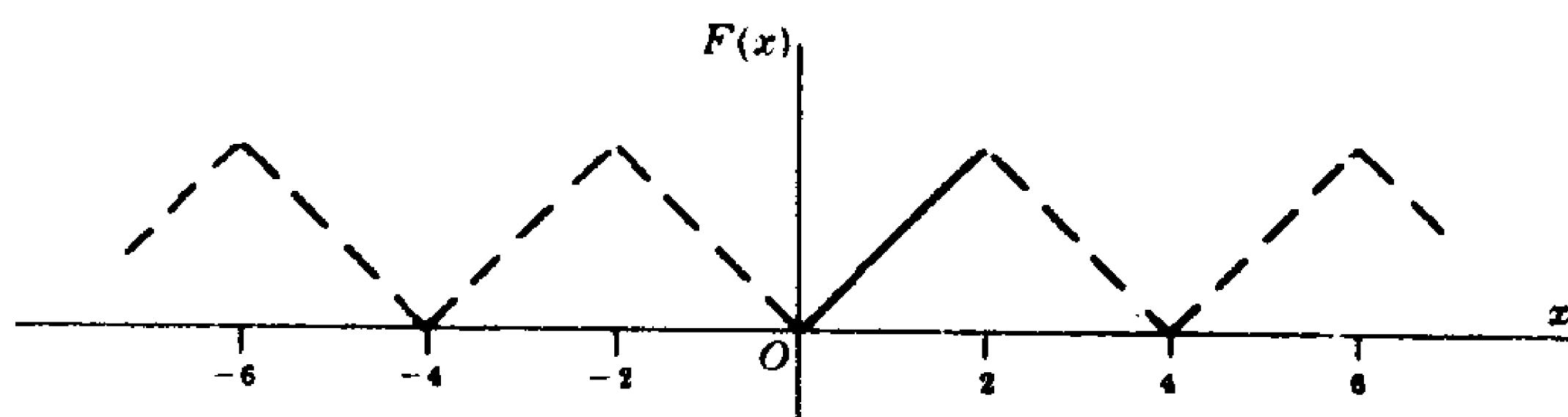


圖 6-7

故  $b_n = 0$ ，

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\
 &= \left\{ (x) \left( \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) - (1) \left( \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \right\} \Big|_0^2 \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \quad \text{其中 } n \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{若 } n=0, \quad a_0 = \int_0^2 x dx = 2.$$

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad F(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} \\
 &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

值得一提的是，所給方程式  $F(x) = x$ ， $0 < x < 2$ ，可同時表為 (a) (b) 兩不同之級數，並別優劣之別。

### 傅立葉級數中的巴弗維恒等式

6.8 若相對於  $F(x)$  之傅立葉級數，在  $(-l, l)$  之間一致收斂至  $f(x)$ ，證明下列巴塞維恒等式

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l \{F(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2)$$

但假設積分存在。

若  $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$ ，將上式乘上  $F(x)$ ，並逐項自  $-l$  至  $l$  積分之（因此級數為一致收斂，故可行此方法），得

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \{F(x)\}^2 dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l F(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} \\ &= \frac{a_0^2}{2} l + l \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned} \quad (1)$$

其中我們用到下列等式

$$\int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = la_n, \quad \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = lb_n, \quad \int_{-l}^l F(x) dx = la_0 \quad (2)$$

此均由傅立葉係數而得。

將(1)式兩端各除以  $l$ ，即可得所求結果。事實上巴塞維恒等式成立之條件，少於我們在這裏所加諸的條件。

## 有限傅氏變換

### 6.9 推導本章中的(a)方程式(9)(b)方程式(11)。

圖 (a) 若  $F(x)$  為在  $(-l, l)$  間的奇函數，則

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1)$$

$$\text{其中} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (2)$$

如果我們寫成

$$\int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = f_s(n)$$

則  $b_n = \frac{2}{l} f_s(n)$  且(1)可寫成所求的型式

$$F(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3)$$

亦可寫成  $F(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\{f_s(n)\}$

(b) 若  $F(x)$  在  $(-l, l)$  間為偶函數，則

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (4)$$

$$\text{其中} \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (5)$$

如果我們寫成

$$\int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = f_c(n)$$

則  $a_0 = \frac{2}{l} f_c(0)$  且(4)式可寫成所需之形式

$$F(x) = \frac{1}{l} f_c(0) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (6)$$

亦可寫成  $F(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\{f_c(n)\}$

6.10 求函數  $F(x) = 2x$ ,  $0 < x < 2$  之(a)有限傅氏正弦變換, 及(b)有限傅氏餘弦變換。

圖 (a) 因  $l = 4$ , 故

$$\begin{aligned} f_s(n) &= \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^4 2x \sin \frac{n\pi x}{4} dx \\ &= \left\{ (2x) \left( \frac{-\cos n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - (2) \left( \frac{-\sin n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right\} \Big|_0^4 = 32 \left( \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) 若 } n > 0, f_c(n) &= \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^4 2x \cos \frac{n\pi x}{4} dx \\ &= \left\{ (2x) \left( \frac{\sin n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - (2) \left( \frac{-\cos n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right\} \Big|_0^4 = 32 \left( \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{若 } n = 0, f_c(n) = f_c(0) = \int_0^4 2x dx = 16$$

6.11 由下列各式中求  $F(x)$ : (a)  $\mathcal{F}_s\{F(x)\} = 16(-1)^{n-1}/n^3$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 其中  $0 < x < 8$ ; (b)  $\mathcal{F}_c\{F(x)\} = \sin(n\pi/2)/2n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  若  $n = 0$ , 則  $F_c\{F(x)\} = \pi/4$ , 其中  $0 < x < 2\pi$ 。

圖 (a) 由第9題中的(3)式, 以  $l = 8$  代入得

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathcal{F}_s^{-1} \left\{ \frac{16(-1)^{n-1}}{n^3} \right\} \\ &= \frac{2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n-1}}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{8} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{8} \end{aligned}$$

(b) 由第9題(b)中的(6)式, 且  $l = 2\pi$ , 得

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathcal{F}_c^{-1} \left\{ \frac{\sin(n\pi/2)}{2n} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \end{aligned}$$

## 傅立葉級數的收斂性

6.12 證明 (a)  $\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Mt = \frac{\sin(M + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}$

(b)  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(M + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(M + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{2}.$

證 (a) 由於  $\cos nt \sin \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(\sin(n + \frac{1}{2})t - \sin(n - \frac{1}{2})t).$

將  $n$  由 1 至  $M$  代入，並將各式相加，得

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}t \{\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Mt\} &= (\sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t) + (\sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t) \\ &\quad + \cdots + \{\sin(M + \frac{1}{2})t - \sin(M - \frac{1}{2})t\} \\ &= \frac{1}{2} \{\sin(M + \frac{1}{2})t - \sin \frac{1}{2}t\} \end{aligned}$$

除以  $\sin \frac{1}{2}t$ ，再加上  $\frac{1}{2}$ ，即得證。

(b) 將(a)之等式分別自  $-\pi$  至 0 及自 0 至  $\pi$  積分之。因所有含餘弦的積分均為零，故可得所給之答案。

6.13 證明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi F(x) \sin nx \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi F(x) \cos nx \, dx = 0$  其中  $F(x)$  為分段連續。

證 由第 8 題 (其中  $l = \pi$ ) 可立刻看出上述等式，因欲使  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2)$  為收斂

，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

此結論常稱為里曼定理 (Riemann's theorem)。

6.14 證明  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi F(x) \sin(M + \frac{1}{2})x \, dx = 0$  其中  $F(x)$  為分段連續。

證 因

$$\int_{-\pi}^\pi F(x) \sin(M + \frac{1}{2})x \, dx = \int_{-\pi}^\pi \{F(x) \sin \frac{1}{2}x\} \cos Mx \, dx + \int_{-\pi}^\pi \{F(x) \cos \frac{1}{2}x\} \sin Mx \, dx$$

利用 13 題的結論，並分別以  $F(x) \sin \frac{1}{2}x$  及  $F(x) \cos \frac{1}{2}x$  替代  $F(x)$ ，即可得所求之結果 (只要  $F(x)$  為分段連續，則  $F(x) \sin \frac{1}{2}x$  及  $F(x) \cos \frac{1}{2}x$  均為分段連續)。

若積分上下限由  $-\pi, \pi$  改為  $a, b$ ，則上面之結論仍然成立。

6.15 假設  $l = \pi$ ，即對應於  $F(x)$  的傅氏級數之週期為  $2l = 2\pi$ ，證明

$$S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t+x) \frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

圖 利用傅立葉係數公式，其中  $l = \pi$ ，得

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \cos nu \, du \right) \cos nx + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \sin nu \, du \right) \sin nx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) (\cos nu \cos nx + \sin nu \sin nx) \, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \cos n(u-x) \, du \end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \, du$$

$$\begin{aligned} S_M(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \, du + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \cos n(u-x) \, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^M \cos n(u-x) \right\} \, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \frac{\sin(M+\frac{1}{2})(u-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(u-x)} \, du \end{aligned}$$

利用 12 題，並令  $u-x = t$ ，得

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t+x) \frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

因被積函數的週期為  $2\pi$ ，我們可用其他長度為  $2\pi$  的區間來取代  $(-\pi-x, \pi-x)$ ，例如  $-\pi$  至  $\pi$ ，由此我們可得所求結果。

### 6.16 證明

$$\begin{aligned} S_M(x) - \left( \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} \right) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left( \frac{F(t+x) - F(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right) \sin(M+\frac{1}{2})t \, dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right) \sin(M+\frac{1}{2})t \, dt \end{aligned}$$

圖 由 12 題，

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 F(t+x) \frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(t+x) \frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \quad (1)$$

將 12 題(b)的積分式分別乘上  $F(x-0)$  及  $F(x+0)$ ，得

$$\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 F(x-0) \frac{\sin(M + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x+0) \frac{\sin(M + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \quad (2)$$

將(1)式減(2)式，即可得證。

6.17 若  $F(x)$  及  $F'(x)$  在  $(-\pi, \pi)$  間為分段連續，證明

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

圖 因  $F(x)$  為分段連續，故函數  $\frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t}$  在  $0 < t \leq \pi$  亦為分段連續。

又，

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t+x) - F(x+0)}{t} \cdot \frac{t}{2 \sin \frac{1}{2}t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t+x) - F(x+0)}{t}$$

因  $F'(x)$  為分段連續，故在每一點  $x$ ，其  $F(x)$  的右端點導式存在，即上式極限值存在。

故  $\frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t}$  在  $0 \leq t \leq \pi$  為分段連續。

同理， $\frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t}$  在  $-\pi \leq t \leq 0$  亦為分段連續。

故由 14 及 16 題，可得

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M(x) - \left\{ \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} \right\} = 0 \quad \text{即} \quad \lim_{M \rightarrow \infty} S_M(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

### 傅立葉積分及傅立葉變換

6.18 (a) 求下列函數的傅氏變換  $F(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

(b) 當  $a = 1$  時，畫出  $F(x)$  及其傅氏變換。

圖 (a)  $F(x)$  的傅氏變換為

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-i\lambda u} du = \int_{-a}^a (1) e^{-i\lambda u} du = \left. \frac{e^{-i\lambda u}}{-i\lambda} \right|_{-a}^a \\ &= \left( \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} \right) = 2 \frac{\sin \lambda a}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

代入  $\lambda = 0$ ，得  $f(\lambda) = 2a$ 。

(b)  $a = 1$  時， $F(x)$  及  $f(\lambda)$  的圖形如圖 6-8 及 6-9 所示。

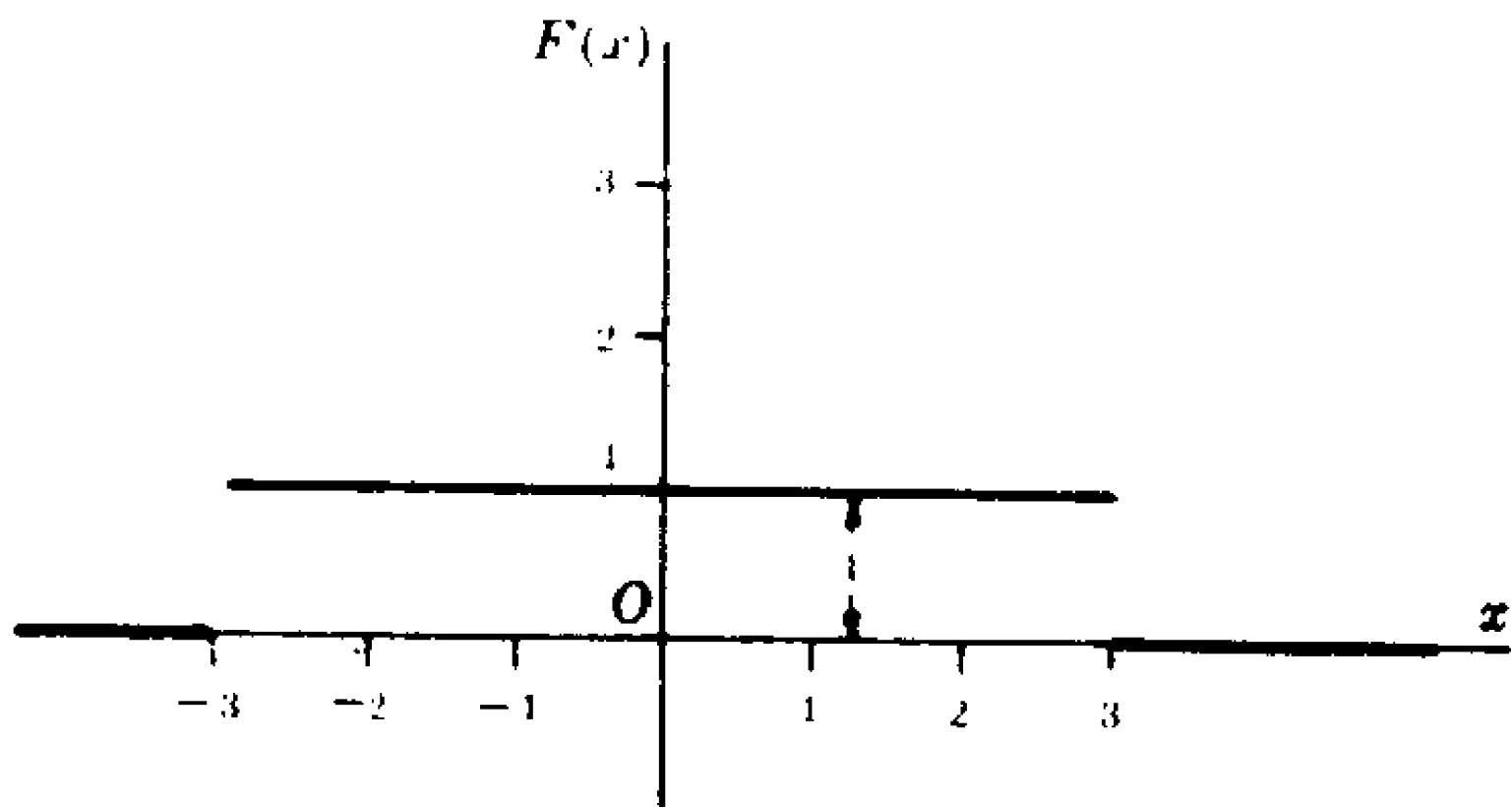


圖 6-8

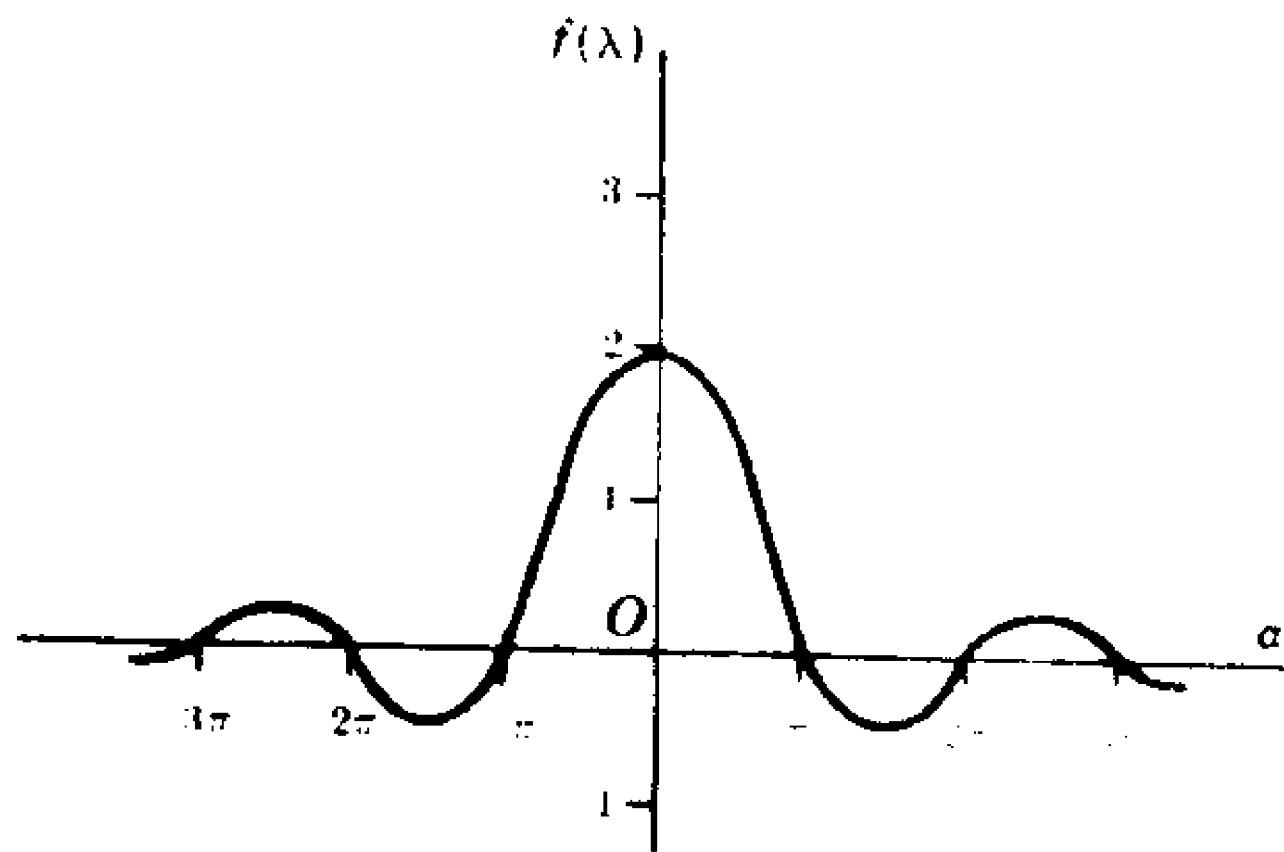


圖 6-9

6.19 (a) 利用 18 題之結論，計算  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda$

(b) 推導下式之值  $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$

解 (a) 由傅立葉積分定理，若

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-i\lambda u} du \quad \text{則} \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

再由 18 題，

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin \lambda a}{\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 1/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (1)$$

(1)式的左端為

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda \quad (2)$$

(2)式第二積分式中，其被積函數為奇函數，故積分值為零，由(1)及(2)，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} \pi & |x| < a \\ \pi/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (3)$$

(b) 在(a)中，若  $x = 0$ ， $a = 1$ ，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda = \pi \quad \text{即} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2}$$

(因被積函數為偶函數)。

6.20 若  $F(x)$  為偶函數，證明：



$$(a) f(\lambda) = 2 \int_0^\infty F(u) \cos \lambda u \, du, \quad (b) F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda.$$

圖 由定義

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-i\lambda u} \, du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda u \, du - i \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \sin \lambda u \, du \quad (1)$$

(a) 因  $F(u)$  爲偶，故  $F(u) \cos \lambda u$  爲偶， $F(u) \sin \lambda u$  爲奇，故(1)式左端之第二積分式爲零，由此可得

$$f(\lambda) = 2 \int_0^\infty F(u) \cos \lambda u \, du,$$

(b) 由(a)， $f(-\lambda) = f(\lambda)$ ，故  $f(\lambda)$  爲偶函數，利用類似(a)的證法，即可得證。

若本題改爲奇函數，則亦可得類似之結果，可由正弦取代餘弦而得。

### 傅立葉積分式中的巴塞維恒等式

6.21 試證 18 題傅氏變換中，傅立葉積分的巴塞維恒等式。

圖 欲證下式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F(x)\}^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(\lambda)\}^2 \, d\lambda$$

$$\text{其中 } F(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad \text{及} \quad f(\lambda) = 2 \frac{\sin \lambda a}{\lambda}$$

亦即要證明下式

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a (1)^2 \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2 \lambda a}{\lambda^2} \, d\lambda \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda a}{\lambda^2} \, d\lambda &= 2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda a}{\lambda^2} \, d\lambda = \pi a \\ \int_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda a}{\lambda^2} \, d\lambda &= \frac{\pi a}{2} \end{aligned}$$

令  $\lambda a = u$  代入第 111 題。即可得知此等式成立。亦可直接計算  $\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2} \, du$  而得。

### 傅立葉積分定理的證明

6.22 利用傅立葉級數的極限形式，啓發式地證明傅立葉積分定理。

圖 令

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

$$\text{其中 } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(u) \cos \frac{n\pi u}{l} du \quad \text{及} \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(u) \sin \frac{n\pi u}{l} du$$

將  $a_n, b_n$  代回(1)式 (見 15 題)，得

$$F(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(u) du + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l F(u) \cos \frac{n\pi}{l}(u-x) du \quad (2)$$

若假設  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)| du$  收斂，則在  $l \rightarrow \infty$  時，(2)式右端第一項趨近於零，而其他項近於

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \frac{n\pi}{l}(u-x) du \quad (3)$$

最後一步驟並不很嚴密，使得此證明被稱為啓發式的 (Heuristic)

令  $\Delta \lambda = \pi/l$ ，(3)可改寫為

$$F(x) = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \lambda F(n \Delta \lambda) \quad (4)$$

其中

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(u-x) du \quad (5)$$

但(4)式之極限等於

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(u-x) du$$

此即為傅立葉積分公式。

以上證明只提供一個可能的推論。若要更嚴密，可由下式著手

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(u-x) dx$$

並檢查其收斂性。此法可參見 23 ~ 26 題。

6.23 證明：(a)  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^l \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \frac{\pi}{2}$ , (b)  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-l}^0 \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \frac{\pi}{2}$

圖 (a) 令  $\lambda v = y$ ，則  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^l \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda l} \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$

(由第5章第43題)

$$(b) \text{ 令 } \lambda v = -y, \text{ 則 } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-1}^0 \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$$

6.24 若  $G(x)$  在  $(a, b)$  間為分段連續，則由里曼定理得知

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b G(x) \sin \lambda x dx = 0$$

對於餘弦函數亦有類似結果（見81題）。利用上式證明

$$(a) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^l F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \frac{\pi}{2} F(x+0)$$

$$(b) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-l}^0 F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \frac{\pi}{2} F(x-0)$$

其中假設  $F(x)$  及  $F'(x)$  分別在  $(0, l)$  及  $(-l, 0)$  中為分段連續。

證 (a) 利用23題(a)，可知上式之證明相當於要證明下式

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^l \{F(x+v) - F(x+0)\} \frac{\sin \lambda v}{v} dv = 0$$

因  $\lim_{v \rightarrow 0+} F(v)$  存在，且  $f(x)$  為分段連續，故  $G(v) = \frac{F(x+v) - F(x+0)}{v}$  亦為

分段連續，由此立刻可知上式成立（由里曼定理）。

(b) 利用23題(b)及類似(a)部份之證明，可得證。

6.25 若  $F(x)$  滿足  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx$  收斂，證明

$$(a) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \frac{\pi}{2} F(x+0), \quad (b) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^0 F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \frac{\pi}{2} F(x-0).$$

證 由下式

$$\int_0^{\infty} F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \int_0^l F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv + \int_l^{\infty} F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} F(x+0) \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \int_0^l F(x+0) \frac{\sin \lambda v}{v} dv + \int_l^{\infty} F(x+0) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \quad (2)$$

相減得，

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \{F(x+v) - F(x+0)\} \frac{\sin \lambda v}{v} dv \\ &= \int_0^l \{F(x+v) - f(x+0)\} \frac{\sin \lambda v}{v} dv + \int_l^{\infty} F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv - \int_l^{\infty} F(x+0) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \end{aligned} \quad (3)$$

將(3)式中的積分式分別記爲  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  及  $I_3$ , 則  $I = I_1 + I_2 + I_3$ , 故

$$|I| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \quad (4)$$

但

$$|I_2| \leq \int_l^\infty \left| F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} \right| dv \leq \frac{1}{l} \int_l^\infty |F(x+v)| dv$$

又

$$|I_3| \leq |F(x+0)| \left| \int_l^\infty \frac{\sin \lambda v}{v} dv \right|$$

因  $\int_0^\infty |F(x)| dx$  和  $\int_0^\infty \frac{\sin \lambda v}{v} dv$  均收斂, 我們可選取夠大的  $l$ , 使得  $|I_2| \leq \epsilon/3$ ,  $|I_3| \leq \epsilon/3$ , 又我們亦可選取夠大的  $\lambda$ , 使得  $|I_1| \leq \epsilon/3$ , 再由(4)式, 當  $\lambda$  及  $l$  均夠大時, 會使得  $|I| < \epsilon$ , 由此可得所求結果。

(b)之證明和(a)完全相同。

### 6.26 證明傅立葉積分公式, 其中 $F(x)$ 滿足 6.1 中的條件。

圖 我們須證明  $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda=0}^l \int_{u=-\infty}^\infty F(u) \cos \lambda(x-u) du d\lambda = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$

因  $\left| \int_{-\infty}^\infty F(u) \cos \lambda(x-u) du \right| \leq \int_{-\infty}^\infty |F(u)| du$ , 而  $\int_{-\infty}^\infty |F(u)| du$  收斂, 故由積

分式的瓦士曲士測試 (Weierstrass test), 可知對所有  $\lambda$  值,  $\int_{-\infty}^\infty F(u) \cos \lambda(x-u) du$  爲絕對且一致收斂。因此我們可調動積分次序, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda=0}^l d\lambda \int_{u=-\infty}^\infty F(u) \cos \lambda(x-u) du &= \frac{1}{\pi} \int_{u=-\infty}^\infty F(u) du \int_{\lambda=0}^l \cos \lambda(x-u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{u=-\infty}^\infty F(u) \frac{\sin l(u-x)}{u-x} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{v=-\infty}^\infty F(x+v) \frac{\sin lv}{v} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 F(x+v) \frac{\sin lv}{v} dv + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(x+v) \frac{\sin lv}{v} dv \end{aligned}$$

其中用到  $u = x + v$ 。

令  $l \rightarrow \infty$ , 由 24 題可知所給之積分式, 將收斂至  $\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$  故得證。

### 其他各類問題

6.27 將  $F(x) = \sin x$ ,  $0 < x < \pi$ , 展開成傅氏餘弦級數。

圖 只含餘弦項的傅氏級數，其原函數必為偶函數，故我們將  $F(x)$  的定義擴展（見圖 6-10 的虛線），使其成為偶函數。經過此擴展之後， $F(x)$  可視為定義在長度為  $2\pi$  的區間。取其週期為  $2\pi$ ，可得  $2l = 2\pi$ ，即  $l = \pi$ 。

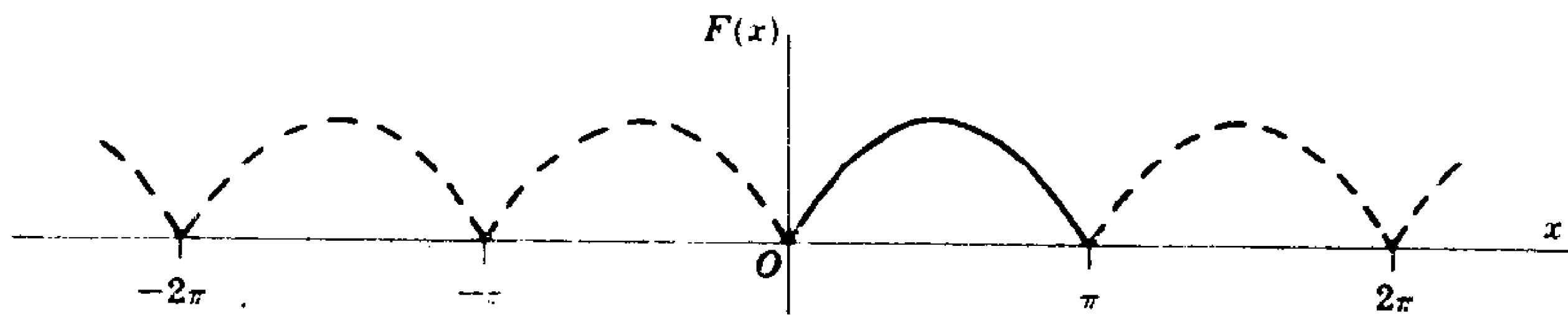


圖 6-10

由第 6 題， $b_n = 0$  且

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\sin(x+nx) + \sin(x-nx)\} dx = \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right\} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1 + \cos n\pi}{n+1} - \frac{1 + \cos n\pi}{n-1} \right\} \\ &= \frac{-2(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)} \quad \text{其中 } n \neq 1. \end{aligned}$$

$$\text{若 } n=1, \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_0^\pi = 0.$$

$$\text{若 } n=0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad F(x) &= -\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + \cos n\pi)}{n^2 - 1} \cos nx \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \cdots \right) \end{aligned}$$

6.28 證明  $\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x \geq 0$

圖 令  $F(x) = e^{-x}$  代入傅立葉積分定理

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x d\lambda \int_0^\infty F(u) \cos \lambda u du$$

$$\text{即} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x d\lambda \int_0^\infty e^{-u} \cos \lambda u du = e^{-x}$$

$$\text{但} \quad \int_0^\infty e^{-u} \cos \lambda u du = \frac{1}{\lambda^2 + 1}. \quad \text{故}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda = e^{-x} \quad \text{即} \quad \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

6.29 解積分方程式  $\int_0^x F(x) \cos \lambda x dx = \begin{cases} 1-\lambda & 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0 & \lambda > 1 \end{cases}$

證 令  $\int_0^\infty F(x) \cos \lambda x dx = f(\lambda)$  並取  $f(\lambda) = \begin{cases} 1-\lambda & 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0 & \lambda > 1 \end{cases}$ ，故由傅立葉積分定理，可得

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\lambda) \cos \lambda x d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-\lambda) \cos \lambda x d\lambda = \frac{2(1 - \cos x)}{\pi x^2}$$

6.30 求  $\partial U / \partial x$  (其中  $U$  為  $x, t$  的函數，且  $0 < x < l, t > 0$ ) 的 (a) 有限傅立葉正弦變換 (b) 有限傅立葉餘弦變換。

證 (a) 由定義  $\partial U / \partial x$  的有限傅立葉正弦變換為 (利用部分積分)

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^l - \frac{n\pi}{l} \int_0^l U(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

即  $\mathcal{F}_s \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \right\} = -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c \{U\}$

(b) 有限傅立葉餘弦變換為

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = U(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^l - \frac{n\pi}{l} \int_0^l U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

即  $\mathcal{F}_c \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \right\} = -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_s \{U\} - \{U(0, t) - U(l, t) \cos n\pi\}$

6.31 對於  $\partial^2 U / \partial x^2$ ，重做 30 題 (a) 及 (b)。

證 在 30 題的結論中，以  $\partial U / \partial x$  取代  $U$ ，可得

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\} &= -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \mathcal{F}_s \{U\} + \frac{n\pi}{l} \{U(0, t) - U(l, t) \cos n\pi\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\} &= -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \right\} - \{U_x(0, t) - U_x(l, t) \cos n\pi\} \\ &= -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \mathcal{F}_c \{U\} - \{U_x(0, t) - U_x(l, t) \cos n\pi\} \end{aligned}$$

其中  $U_x$  代表對  $x$  的偏導式。

6.32 利用有限傅氏變換，解

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U(0, t) = 0, \quad U(4, t) = 0, \quad U(x, 0) = 2x$$

其中  $0 < x < 4$ ,  $t > 0$ 。

圖 對偏微分方程式的兩端各取有限傅氏正弦變換 (其中  $l = 4$ )，得

$$\int_0^4 \frac{\partial U}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \int_0^4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi x}{4} dx$$

令  $u = F_s\{U\}$  利用 31 題(a)，並代入已知條件  $U(0, t) = 0$ ,  $U(4, t) = 0$ ，得

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{16}u \quad (1)$$

其中  $u = u(n, t)$ 。

取已知條件  $U(x, 0) = 2x$  的傅氏正弦變換，可得 (如同第 10 題(a))

$$u(n, 0) = F_s\{2x\} = \frac{32(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \quad (2)$$

解(1)之微分方程式，可得 ( $c$  為任意常數)

$$u = u(n, t) = ce^{-n^2\pi^2 t/16} \quad (3)$$

因  $c = u(n, 0)$ ，故由(2)及(3)

$$u = \frac{32(1 - \cos n\pi)}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

再由第 9 題(a)，反傅氏正弦變換為

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(1 - \cos n\pi)}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16} \\ &= \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos n\pi}{n} \right) e^{-n^2\pi^2 t/16} \end{aligned}$$

物理上， $U(x, t)$  代表一物質在任意點  $x$  及任意時間  $t$  的溫度，而此物質被侷限於兩平面  $x=0$  及  $x=4$  之間。已知條件  $U(0, t)=0$  及  $U(4, t)=0$  表示在端點 (兩平面) 之溫度為零，而  $U(x, 0)=2x$  表示最初溫度值為  $x$  的函數。此物質可換成在  $x$  軸上的圓棒，其端點為  $x=0$  及  $x=4$ ，且其表面是絕熱的。

6.33 解  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ ，已知條件為

$$U(0, t) = 0, \quad U(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}, \quad U(x, t) \text{ 爲有界}$$

答 將所給之偏微分方程式兩端各取傅氏正弦變換，得

$$\int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial t} \sin \lambda x \, dx = \int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \lambda x \, dx \quad (1)$$

$$\text{若} \quad u = u(\lambda, t) = \int_0^\infty U(x, t) \sin \lambda x \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{則} \quad \frac{du}{dt} &= \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \sin \lambda x - \lambda U \cos \lambda x \right\} \Big|_0^\infty - \lambda^2 \int_0^\infty U \sin \lambda x \, dx \\ &= -\lambda U(0, t) - \lambda^2 u \end{aligned} \quad (2)$$

將(1)式右端部分積分，並假設當  $x \rightarrow \infty$  時， $U$  及  $\partial U / \partial x$  均趨近於零。

由  $U(x, 0)$  的已知定義，取傅氏正弦變換，可得

$$\begin{aligned} u(\lambda, 0) &= \int_0^\infty U(x, 0) \sin \lambda x \, dx \\ &= \int_0^1 \sin \lambda x \, dx = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (3)$$

利用(3)式及  $U(0, t) = 0$  來解(2)式，可得

$$u(\lambda, t) = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2} e^{-\lambda^2 t}$$

再取反傅氏正弦變換，可得所求之解

$$U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} e^{-\lambda^2 t} d\lambda$$

物理上，這可用於表示在某物質  $x > 0$  中的溫度（見 32 題）。

## 補充題

### 傅氏級數，奇函數及偶函數，傅氏正弦及餘弦級數

6.34 畫出下列各函數之圖形，並求出其傅立葉級數（可用到奇函數或偶函數的性質）：

$$\begin{aligned} (a) \quad F(x) &= \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases} \quad \text{週期 } 4 & (c) \quad F(x) = 4x, \quad 0 < x < 10, \quad \text{週期 } 10 \\ (b) \quad F(x) &= \begin{cases} -x & -4 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad \text{週期 } 8 & (d) \quad F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases} \quad \text{週期 } 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{答 (a)} \quad & \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos n\pi)}{n} \sin \frac{n\pi x}{2} & \text{(c)} \quad 20 - \frac{40}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{5} \\ \text{(b)} \quad & 2 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos n\pi)}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{4} & \text{(d)} \quad \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{6(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{6 \cos n\pi}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right\} \end{aligned}$$

6.35 在 34 題中，找出  $F(x)$  的不連續點，並說明其傅氏級數在這些不連續點將會收斂至何值。

$$\begin{aligned} \text{答 (a)} \quad & x = 0, \pm 2, \pm 4, \dots; 0 & \text{(c)} \quad x = 0, \pm 10, \pm 20, \dots; 20 \\ \text{(b)} \quad & \text{沒有不連續點。} & \text{(d)} \quad x = \pm 3, \pm 9, \pm 15, \dots; 3 \end{aligned}$$

6.36 將  $F(x) = \begin{cases} 2-x & 0 < x < 4 \\ x-6 & 4 < x < 8 \end{cases}$  展開成週期為 8 的傅氏級數。

$$\text{答} \quad \frac{16}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{4} + \dots \right\}$$

6.37 (a) 將  $F(x) = \cos x$ ,  $0 < x < \pi$  展開成傅氏正弦級數。

(b)  $F(x)$  在  $x=0$  及  $x=\pi$  應如何定義，才可使級數在  $0 \leq x \leq \pi$  間收斂至  $F(x)$ ?

$$\text{答 (a)} \quad \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1} \quad \text{(b)} \quad F(0) = F(\pi) = 0$$

6.38 (a) 將  $F(x) = \cos x$ ,  $0 < x < \pi$  展開成傅氏級數，其中週期為  $\pi$ ，(b) 和 37 題比較，解釋兩者之相同和不同點。

答 答案和 37 題完全相同。

6.39 將  $F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 8-x & 4 < x < 8 \end{cases}$  展開成 (a) 正弦級數 (b) 餘弦級數。

$$\text{答 (a)} \quad \frac{32}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{8} \quad \text{(b)} \quad \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2 \cos n\pi/2 - \cos n\pi - 1}{n^2} \right) \cos \frac{n\pi x}{8}$$

6.40 證明當  $0 \leq x \leq \pi$  時，

$$(a) \quad x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left( \frac{\cos 2x}{1^2} - \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} - \dots \right)$$

$$(b) \quad x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right)$$

6.41 利用 40 題，證明

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

6.42 證明  $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \dots = \frac{3\pi^2\sqrt{2}}{16}$

## 傅氏級數中的巴塞維恒等式

6.43 利用 40 題及巴塞維恒等式，證明 (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ，(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

6.44 證明  $\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$  [提示：利用 27 題]

6.45 證明 (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ ，(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

6.46 證明  $\frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} + \cdots = \frac{4\pi^2 - 39}{16}$

## 有限傅氏變換

6.47 求  $F(x) = 1$ ， $0 < x < l$  的 (a) 有限傅氏正弦變換 (b) 有限傅氏餘弦變換。

答 (a)  $l(1 - \cos n\pi)/n\pi$  (b)  $0$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ ； $l$ ， $n = 0$

6.48 求  $F(x) = x^2$ ， $0 < x < l$  的 (a) 有限傅氏正弦變換 (b) 有限傅氏餘弦變換。

答 (a)  $\frac{2l^3}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1) - \frac{l^3}{n\pi} \cos n\pi$  其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ ； $\frac{l^3}{3}$  其中  $n = 0$  (b)  $\frac{2l^3}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1)$

6.49 若  $\mathcal{F}_s\{F(x)\} = \frac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi^2}$  其中  $0 < x < \pi$ ，求  $F(x)$ 。

答  $\frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} \right) \sin nx$

6.50 若  $\mathcal{F}_c\{F(x)\} = \frac{6(\sin n\pi/2 - \cos n\pi)}{(2n+1)\pi}$  其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ ， $n = 0$  時， $\mathcal{F}_c\{F(x)\} = 2/\pi$

，且  $0 < x < 4$ 。求  $F(x)$ 。

答  $\frac{1}{2\pi} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin n\pi/2 - \cos n\pi}{2n+1} \right) \cos \frac{n\pi}{4}$

6.51 若  $f(n) = \frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}$ ，求 (a)  $\mathcal{F}_s^{-1}\{f(n)\}$  及 (b)  $\mathcal{F}_c^{-1}\{f(n)\}$  但  $0 < x < 1$ 。

答 (a)  $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2} \sin n\pi x$  (b)  $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2} \cos n\pi x$

## 傅氏積分及傅氏變換

6.52 (a) 求下式之傅氏變換  $F(x) = \begin{cases} 1/2\epsilon & |x| \leq \epsilon \\ 0 & |x| > \epsilon \end{cases}$

## 244 第六章 傅立葉級數及積分

(b) 當  $\epsilon \rightarrow 0+$  時，求傅氏變換之極限，並討論其結果。

圖 (a)  $\frac{\sin \lambda \epsilon}{\lambda \epsilon}$ , (b) 1

6.53 (a) 求下式之傅氏變換  $F(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

(b) 計算  $\int_0^\infty \left( \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \right) \cos \frac{x}{2} dx$

圖 (a)  $4 \left( \frac{\lambda \cos \lambda - \sin \lambda}{\lambda^3} \right)$ , (b)  $\frac{3\pi}{16}$

6.54 若  $F(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$  求  $F(x)$  之 (a) 傅氏正弦變換 (b) 傅氏餘弦變換。畫出  $F(x)$  及

其變換式之圖形。 圖 (a)  $\frac{1 - \cos \lambda}{\lambda}$ , (b)  $\frac{\sin \lambda}{\lambda}$

6.55 (a) 求  $e^{-x}$ ,  $x \geq 0$  之傅氏正弦變換。

(b) 利用 (a) 之答案，證明  $\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$ ,  $m > 0$

(c) 由傅立葉積分定理的觀點來看，解釋為何 (b) 之結果不適用於  $m = 0$ 。

圖 (a)  $\lambda/(1 + \lambda^2)$

6.56 由下列積分方程式中，解  $Y(x)$

$$\int_0^\infty Y(x) \sin xt dx = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 2 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

並將所得答案代入驗證。 圖  $Y(x) = (2 + 2 \cos x - 4 \cos 2x)/\pi x$

## 傅氏積分中的巴塞維恒等式

6.57 利用巴塞維恒等式，計算 (a)  $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ , (b)  $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}$

[ 提示：利用  $e^{-x}$ ,  $x > 0$  的傅氏正弦及餘弦變換 ] 圖 (a)  $\pi/4$ , (b)  $\pi/4$

6.58 利用 54 題證明 (a)  $\int_0^\infty \left( \frac{1 - \cos x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$ , (b)  $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

6.59 證明  $\int_0^\infty \frac{(x \cos x - \sin x)^2}{x^6} dx = \frac{\pi}{15}$

## 其他各類問題

6.60 若  $-\pi < x < \pi$  且  $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 證明

$$\frac{\pi}{2} \frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \frac{\sin x}{1^2 - a^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - a^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - a^2} - \dots$$

6.61 若  $-\pi < x < \pi$ , 證明

$$(a) \quad \frac{\pi}{2} \frac{\sinh ax}{\sinh a\pi} = \frac{\sin x}{a^2 + 1^2} - \frac{2 \sin 2x}{a^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{a^2 + 3^2} - \dots$$

$$(b) \quad \frac{\pi \cosh ax}{2 \sinh a\pi} = \frac{1}{2a} - \frac{a \cos x}{a^2 + 1^2} + \frac{a \cos 2x}{a^2 + 2^2} - \dots$$

6.62 (a) 若  $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 證明

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2 - 1^2} + \frac{2a}{a^2 - 2^2} - \frac{2a}{a^2 - 3^2} + \dots$$

(b) 若  $0 < a < 1$ , 證明

$$\int_0^x \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1+x} dx = \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2 - 1^2} + \frac{2a}{a^2 - 2^2} - \frac{2a}{a^2 - 3^2} + \dots$$

(c) 利用(a), (b), 證明  $\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$

[ 提示: 在(a)中, 將  $F(x) = \cos ax$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$  展開成傅氏級數, 在(b)中, 將原積分式寫成 0 至 1, 及由 1 至  $\infty$  的積分式之和, 並令  $x=1/y$  代入第二積分式, 再利用  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$  ]

6.63 若  $0 < x < \pi$  證明  $\mathcal{F}_s^{-1} \left\{ \frac{1 - \cos n\pi}{n^3} \right\} = \frac{1}{2}x(\pi - x)$

6.64 求 (a)  $\mathcal{F}_s \{ \partial^3 U / \partial x^3 \}$  及 (b)  $\mathcal{F}_c \{ \partial^3 U / \partial x^3 \}$

6.65 證明

$$(a) \quad \mathcal{F}_s \{ Y^{(iv)}(x) \} = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \mathcal{F}_s \{ Y(x) \} - \frac{n^3 \pi^3}{l^3} \{ Y(0) + (-1)^{n+1} Y(l) \} + \frac{n\pi}{l} \{ Y''(0) + (-1)^{n+1} Y''(l) \}$$

$$(b) \quad \mathcal{F}_c \{ Y^{(iv)}(x) \} = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \mathcal{F}_c \{ Y(x) \} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \{ Y'(0) + (-1)^{n+1} Y'(l) \} - \{ Y'''(0) + (-1)^{n+1} Y'''(l) \}.$$

6.66 (a) 利用有限傅氏變換, 解

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < 4, \quad t > 0$$

$$U(0, t) = 0, \quad U(4, t) = 0, \quad U(x, 0) = 3 \sin \pi x - 2 \sin 5\pi x$$

246 第六章 傅立葉級數及積分

(b) 此問題及解答之可能的物理意義為何？

答 (a)  $U(x, t) = 3e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x - 2e^{-36\pi^2 t} \sin 5\pi x$

6.67 解  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $0 < x < 6$ ,  $t > 0$  , 已知條件為

$$U(0, t) = 0, \quad U(6, t) = 0, \quad U(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 3 \\ 0 & 3 < x < 6 \end{cases}$$

並解釋其物理意義。

答  $U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left\{ \frac{1 - \cos(n\pi/3)}{n\pi} \right\} e^{-n^2\pi^2 t/36} \sin \frac{n\pi x}{6}$

6.68 (a) 解下列問題時

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < 6, \quad t > 0$$

$$U_x(0, t) = 0, \quad U_x(6, t) = 0, \quad U(x, 0) = 2x$$

你覺得那種變換（正弦或餘弦）較好用？試解釋之。

(b) 求(a)中方程式的解。

答 (b)  $6 + \frac{24}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} \right) e^{-n^2\pi^2 t/36} \cos \frac{n\pi x}{6}$

6.69 一柔軟之繩子長度為  $\pi$ ，拉緊後固定於  $x = 0$  和  $x = \pi$ 。當其開始發生小幅度的上下振動時，在任意點  $x$  及時間  $t$ ，其離開  $x$  軸之位移為  $Y(x, t)$  滿足  $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ，

其中  $a^2 = T/\rho$ ， $T$  為張力， $\rho$  為單位長度之質量。

(a) 利用有限傅氏變換，求此方程式（或稱波動方程式，Wave equation）之解，其中  $a^2 = 4$ ，且已知  $Y(0, t) = 0$ ， $Y(\pi, t) = 0$ ， $Y(x, 0) = 0.1 \sin x + 0.01 \sin 4x$ ，而在  $0 < x < \pi$ ， $t > 0$  時， $Y_t(x, 0) = 0$ 。

(b) 解釋(a)中方程式之解及邊界條件的物理意義。

答 (a)  $Y(x, t) = 0.1 \sin x \cos 2t + 0.01 \sin 4x \cos 8t$

6.70 (a) 解邊界問題  $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$  已知條件為  $Y(0, t) = 0$ ， $Y(2, t) = 0$ ， $Y(x, 0) = 0.05x(2-x)$ ，

$Y_t(x, 0) = 0$ ，其中  $0 < x < 2$ ， $t > 0$  (b) 解釋其物理意義。

答 (a)  $Y(x, t) = \frac{1.6}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \cos \frac{3(2n-1)\pi t}{2}$

6.71 解邊界問題  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ， $U(0, t) = 1$ ， $U(\pi, t) = 3$ ， $U(x, 0) = 2$  其中  $0 < x < \pi$ ， $t > 0$

答  $U(x, t) = 1 + \frac{2x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos n\pi}{n\pi} e^{-n^2 t} \sin nx$

6.72 試說明 71 題的物理意義。

6.73 解 70 題，但其中邊界條件  $Y(x, 0)$  及  $Y_t(x, 0)$  互換，即  $Y(x, 0) = 0$ ,  $Y_t(x, 0) = 0.05x(2-x)$ ，並說明其物理意義。

$$\text{答 } Y(x, t) = \frac{3.2}{3\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \sin \frac{3(2n-1)\pi t}{2}$$

6.74 證明(4)及(5)式。

6.75 驗證下列函數之褶積定理， $F(x) = G(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

6.76 利用(4)及(5)，寫出複數形式的巴塞維恒等式。

6.77 證明(15)式。

6.78 證明(19)及(21)式。

6.79 證明(23)或(24)式。

[ 提示：若  $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} F(u) du$  且  $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda v} G(v) dv$  則

$$f(\lambda) g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(u+v)} F(u) G(v) du dv$$

令  $u+v=x$  代入 ]

6.80 若  $f(\lambda)$  及  $g(\lambda)$  分別是  $F(x)$  及  $G(x)$  的傅氏變換，證明

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \overline{G(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d\lambda$$

其中橫線代表共軛複數。

6.81 證明里曼定理（見 24 題）。

6.82 (a) 說明如何利用傅氏變換去解

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad x > 0$$

其中  $U(0, t) = 0$ ,  $U(x, 0) = e^{-x}$ ，且  $U(x, t)$  為有界。

(b) 說明其物理意義。

$$\text{答 } U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t} \sin \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda$$

6.83 (a) 解  $\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $U(0, t) = 0$ ,  $U(x, 0) = e^{-x}$ ,  $x > 0$ ,  $U(x, t)$  爲有界且  $x > 0$ ,  $t > 0$

(b) 說明其物理意義。

$$\text{答 } U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t} \sin \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda$$

6.84 解  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $U_x(0, t) = 0$ ,  $U(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$ ,  $U(x, t)$  爲有界且  $x > 0$ ,  $t > 0$

$$\text{答 } U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} \right) e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda$$

6.85 (a) 證明 33 題之答案可寫成

$$U(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(1-x)/2\sqrt{t}}^{(1+x)/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv$$

(b) 直接證明(a)中之函數滿足  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  及 33 題之條件。

# 第七章

## 複數反變換公式

### 7.1 複數反變換公式

若  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ ，則  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$  爲

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s) ds, \quad t > 0 \quad (1)$$

而當  $t < 0$  時， $F(t) = 0$ ，此結果稱爲複數反變換積分或公式 (Complex inversion integral or formula)，亦稱爲布拉威齊積分公式 (Bromwich's integral formula)。此式可用於直接計算已知函數  $f(s)$  的反拉氏變換。

(1) 式之積分路徑乃沿複數平面上之直線  $x = \gamma$ ，其中  $s = x + iy$ 。實數  $\gamma$  之選取，必須使得所有的奇點 (含極點、分枝點、本性奇點)，均在直線  $x = \gamma$  之左方。

### 7.2 布拉威齊路徑

在實際上，(1) 式的計算乃由下列線積分求得

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} f(s) ds \quad (2)$$

其中  $C$  爲圖 7-1 的路徑。此路徑通常稱爲布拉威齊路徑 (Bromwich's contour)，乃由直線  $AB$ ，及弧形  $BJKLA$  (爲圓心  $O$ ，半徑  $R$  之圓的一部份) 所組成。

如果以  $\Gamma$  代表弧形  $BJKLA$ ，則因  $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$ ，(1) 式可寫成

$$\begin{aligned} F(t) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s) ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} f(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} f(s) ds \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

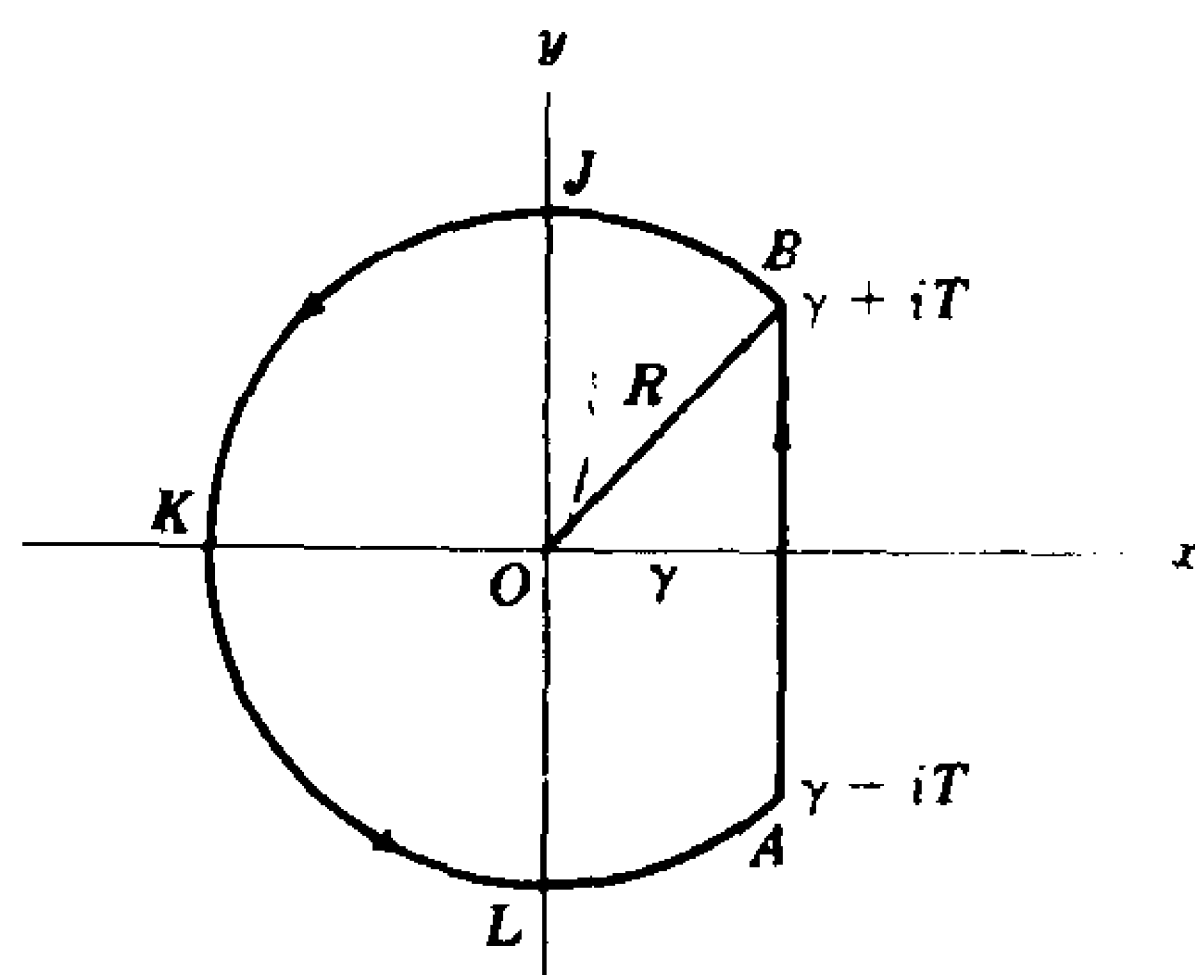


圖 7-1



### 7.3 利用留數定理求反拉氏變換

假設  $f(s)$  的奇點均為極點，且均在  $x = \gamma$  的左邊，再假設在(3)式中，當  $R \rightarrow \infty$  時，沿  $\Gamma$  的積分會趨於零，故由留數定理，可將(3)式寫為

$$\begin{aligned} F(t) &= \text{在 } f(s) \text{ 的極點上， } e^{st} f(s) \text{ 的留數和} \\ &= \sum (\text{在 } f(s) \text{ 的極點， } e^{st} f(s) \text{ 的留數}) \end{aligned} \quad (4)$$

### 7.4 沿 $\Gamma$ 的積分值趨近於零的充分條件

(4)式的成立，須假設當  $R \rightarrow \infty$  時，(3)式中沿  $\Gamma$  的積分值趨近於零。此假設成立的充分條件如下示。

**定理 7.1:** 若我們可以找到常數  $M > 0$ ， $k > 0$ ，使得在  $\Gamma$  上（此時  $s = Re^{i\theta}$ ）時，

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k} \quad (5)$$

則當  $R \rightarrow \infty$  時， $e^{st} f(s)$  沿  $\Gamma$  的積分值將趨近於零，即

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{st} f(s) ds = 0 \quad (6)$$

若  $f(s) = P(s)/Q(s)$ ，其中  $P(s)$  及  $Q(s)$  均為多項式，且  $P(s)$  之次數小於  $Q(s)$ ，則(5)式之條件即會成立，參見 15 題。

若  $f(s)$  有除了極點之外的奇點時，以上之推論仍成立。

### 7.5 碰到分枝點時，布拉威齊路徑的修改

若  $f(s)$  含有分枝點，只要將布拉威齊路徑適當地修改，則上述各結論仍然適用。例如，若  $f(s)$  只有一個分枝點在  $x = 0$ ，則我們可利用圖 7-2 的路徑。在此圖中， $BDE$  及  $LNA$  均為圓弧（圓心  $O$ ，半徑  $R$  之圓的一部份）， $HJK$  則為另一較小圓（圓心  $O$ ，半徑  $\epsilon$ ）之圓弧。在此情況下計算反拉氏變換的細節，可參見第 9 題。

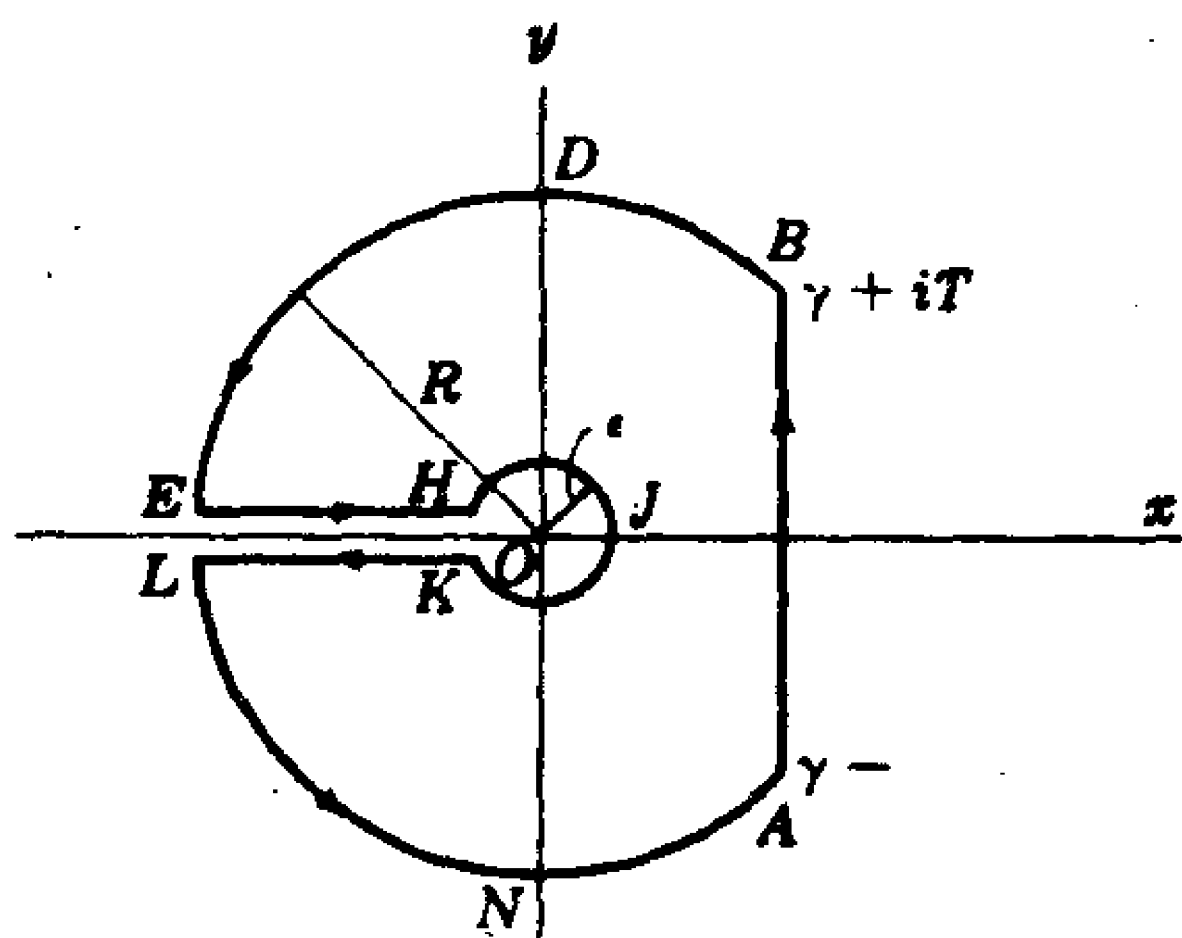


圖 7-2

## 7.6 具有無限多個奇點的情形

若一函數具有無限多個孤立奇點，則亦可利用上法以求得反拉氏變換。在此情形時，必須選擇布拉威齊路徑中的圓弧半徑  $R_m$ ，使得此曲線只有包含一部份有限個奇點，但不經過任何奇點。藉著令  $m \rightarrow \infty$ ，並求取適當的極限值。可求得所需的反拉氏變換，參見 13 及 14 題。

## 附解題

### 複數反變換公式

#### 7.1 證明複數反變換公式

圖 由定義  $f(s) = \int_0^\infty e^{-su} F(u) du$  故

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s) ds = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \int_0^\infty e^{st-su} F(u) du ds$$

令  $s = \gamma + iy$ ,  $ds = i dy$ , 代入上式

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{-T}^T e^{iyt} dy \int_0^\infty e^{-iyu} [e^{-\gamma u} F(u)] du &= \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \begin{cases} 2\pi e^{-\gamma t} F(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(其中利用到第 6 章的傅氏積分定理) 故

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s) ds \quad t > 0$$

得證。

在上面的證明中，我們假設  $e^{-\gamma u} F(u)$  在  $(0, \infty)$  間為絕對可積 (Absolutely integrable)，即  $\int_0^\infty e^{-\gamma u} |F(u)| du$  收斂，故可引用傅氏積分定理。此假設成立的充分條件是  $F(t)$  必須為  $\gamma$  指數級，而  $\gamma$  的選取必須使得  $f(s)$  的所有奇點在複數平面上均在直線  $x = \gamma$  的左方。除此條件外， $\gamma$  無其他限制。

7.2 令  $\Gamma$  代表布拉威齊路徑中的曲線部份  $BJPKQLA$ ，其方程式為  $s = Re^{i\theta}$ ， $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$ ，即  $\Gamma$  為圓心  $O$ ，半徑  $R$  的圓的一部份。假設在  $\Gamma$  上時，下式成立

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k}$$

其中  $K > 0$  且  $M$  為常數。證明：

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{st} f(s) ds = 0$$

圖 若  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  及  $\Gamma_4$  分別代表圓弧  $BJ, JPK, KQL$  及  $LA$ ，則

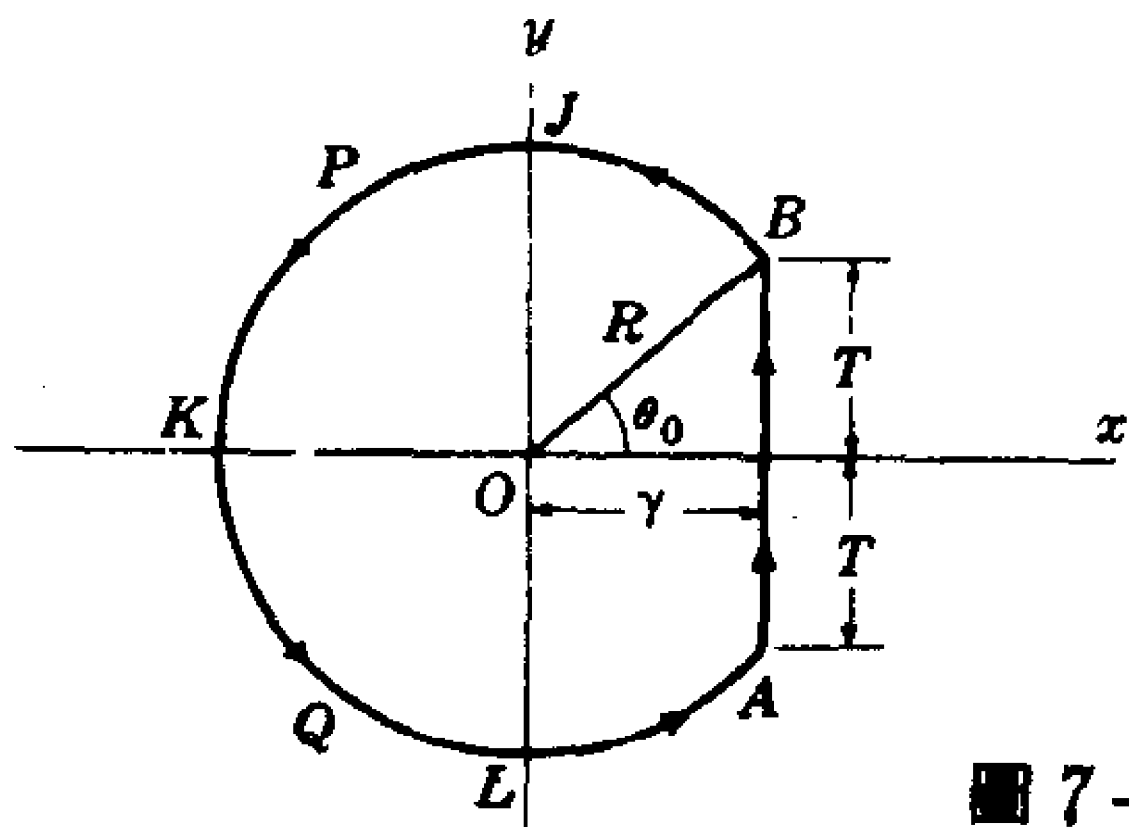


圖 7-3

$$\int_{\Gamma} e^{st} f(s) ds = \int_{\Gamma_1} e^{st} f(s) ds + \int_{\Gamma_2} e^{st} f(s) ds + \int_{\Gamma_3} e^{st} f(s) ds + \int_{\Gamma_4} e^{st} f(s) ds$$

若我們可證明在  $R \rightarrow \infty$  時，等號右端的積分式均趨近於零，則即可得證。以下四個積分式來討論。

情況 1：沿  $\Gamma_1$  ( $BJ$ ) 的積分

沿  $\Gamma_1$  時， $s = Re^{i\theta}$ ， $\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$ ，即

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma_1} e^{st} f(s) ds = \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{Re^{i\theta}t} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \\ |I_1| &\leq \int_{\theta_0}^{\pi/2} |e^{(R \cos \theta)t}| |e^{i(R \sin \theta)t}| |f(Re^{i\theta})| |iRe^{i\theta}| d\theta \\ &\leq \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{(R \cos \theta)t} |f(Re^{i\theta})| R d\theta \\ &\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{(R \cos \theta)t} d\theta = \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\phi_0} e^{(R \sin \phi)t} d\phi \end{aligned}$$

其中我們用到在  $\Gamma_1$  上的已知條件  $|f(s)| \leq M/R^k$ ，並用到代換式  $\theta = \pi/2 - \phi$ ，且  $\phi_0 = \pi/2 - \theta_0 = \sin^{-1}(\gamma/R)$

因  $\sin \phi \leq \sin \phi_0 \leq \cos \theta_0 = \gamma/R$ ，故上述之最後一項積分式會小或等於

$$\frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\phi_0} e^{\gamma t} d\phi = \frac{M e^{\gamma t} \phi_0}{R^{k-1}} = \frac{M e^{\gamma t}}{R^{k-1}} \sin^{-1} \frac{\gamma}{R}$$

但當  $R \rightarrow \infty$  時，上式最右端之值趨近於零（當  $R$  很大時  $\sin^{-1}(\gamma/R) \approx \gamma/R$ ），故

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = 0$$

情況 2：沿  $\Gamma_2$  ( $JPK$ ) 的積分

沿  $\Gamma_2$  時， $s = Re^{i\theta}$ ， $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ ，即

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} e^{st} f(s) ds = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{Re^{i\theta}t} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

如同情況 1，可得

$$|I_2| \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{(R \cos \theta)t} d\theta \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-(R \sin \phi)t} d\phi$$

其中代入  $\theta = \pi/2 + \phi$ 。

但當  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  時， $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$ （見第3題），故上述之最後一項積分式會小或等於

$$\frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2R\phi t/\pi} d\phi = \frac{\pi M}{2tR^k} (1 - e^{-Rt})$$

當  $R \rightarrow \infty$  時，上式趨近於零，故  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = 0$

情況 3：沿  $\Gamma_3$  (KQL) 的積分

可用類似情況 2 的推導過程解之（見 58 題(a)）。

情況 4：沿  $\Gamma_4$  (LA) 的積分

可用類似情況 1 的推導過程解之（見 58 題(b)）。

### 7.3 證明當 $0 \leq \phi \leq \pi/2$ 時 $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$

圖 解 1：

見圖 7-4，曲線  $OPQ$  為正弦曲線  $y = \sin \phi$  的一部份，而  $y = 2\phi/\pi$  為直線  $PQ$ ，故在幾何上可明顯看出：當  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  時， $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$ 。

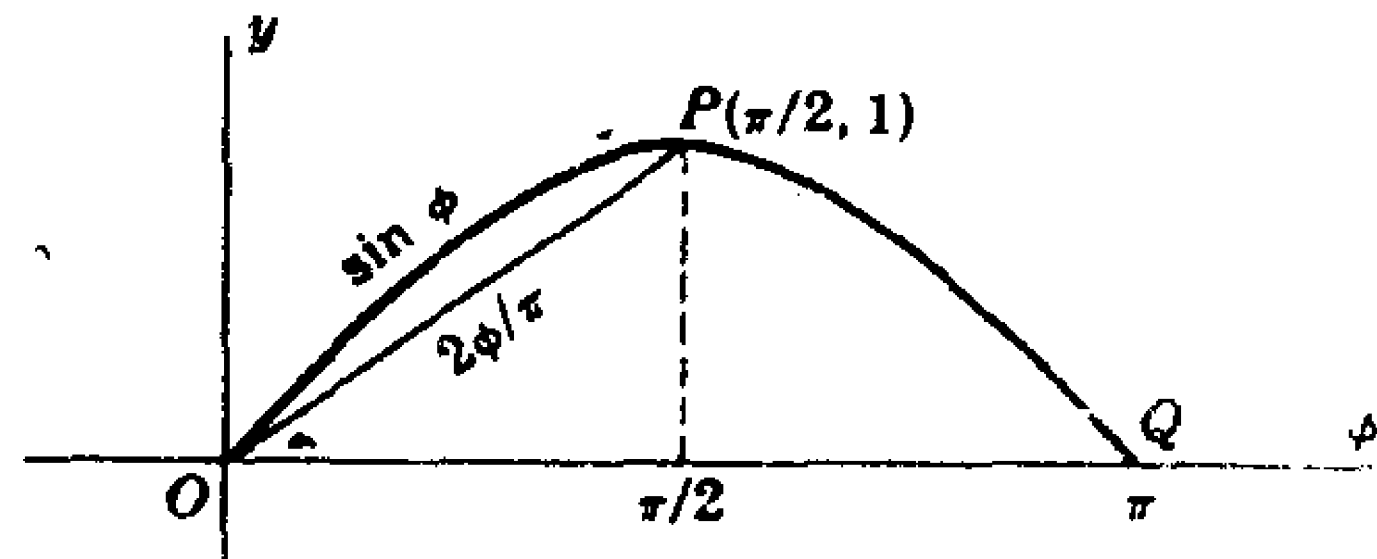


圖 7-4

解 2：解析解法

令  $F(\phi) = \frac{\sin \phi}{\phi}$ ，則

$$\frac{dF}{d\phi} = F'(\phi) = \frac{\phi \cos \phi - \sin \phi}{\phi^2} \quad (1)$$

若  $G(\phi) = \phi \cos \phi - \sin \phi$ ，則

$$\frac{dG}{d\phi} = G'(\phi) = -\phi \sin \phi \quad (2)$$

故當  $0 \leq \phi < \pi/2$  時， $G'(\phi) \leq 0$ ，即  $G(\phi)$  為遞減函數。因  $G(0) = 0$ ，故  $G(\phi) \leq 0$ 。再由(1)式，得  $F'(\phi) \leq 0$ ，即  $F(\phi)$  為遞減函數。定義  $F(0) = \lim_{\phi \rightarrow 0} F(\phi) = 1$ ，則當  $\phi$  由 0 增至  $\pi/2$  時， $F(\phi)$  由 1 減至  $2/\pi$ ，故

$$1 \geq \frac{\sin \phi}{\phi} \geq \frac{2}{\pi}$$

由此可得證。

## 利用留數定理求反拉氏變換

7.4 假設  $f(s)$  的所有奇點均為極點，且這些奇點均在直線  $x = \gamma$  ( $\gamma$  為實數) 的左方，再假設  $f(s)$  滿足第 2 題中的條件，證明  $f(s)$  的反拉氏變換為

$$F(t) = \text{在所有 } f(s) \text{ 的極點上, } e^{st} f(s) \text{ 的留數和}$$

$$\text{圖} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} f(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} f(s) ds$$

其中  $C$  為第 2 題的布拉威齊路徑，而  $\Gamma$  為圖 7-3 的圓弧  $BJPKQLA$ ，由留數定理得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} f(s) ds &= \text{在 } C \text{ 內部的所有 } f(s) \text{ 極點上, } e^{st} f(s) \text{ 的留數和} \\ &= \sum C \text{ 內部的留數} \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s) ds = \sum C \text{ 內部的留數} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} f(s) ds$$

令  $R \rightarrow \infty$ ，由第 2 題可得

$$F(t) = \text{在所有 } f(s) \text{ 的極點上, } e^{st} f(s) \text{ 的留數和}$$

7.5 (a) 證明  $f(s) = \frac{1}{s-2}$  滿足第 2 題的條件。

(b) 求  $\frac{e^{st}}{s-2}$  在極點  $s = 2$  的留數。

(c) 利用複數反變換公式，計算  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$

圖 (a) 令  $s = Re^{i\theta}$ ，則

$$\left| \frac{1}{s-2} \right| = \left| \frac{1}{Re^{i\theta}-2} \right| \leq \frac{1}{|Re^{i\theta}|-2} = \frac{1}{R-2} < \frac{2}{R}$$

當  $R > 4$ ，上式不等式即可成立。故取  $k = 1$ ， $M = 2$ ，即可滿足第 2 題中的條件。在上述推導過程中，我們用到了下列不等式  $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$  (參見第 5 章 49 題(c))。

(b) 在單極點  $s = 2$  的留數為

$$\lim_{s \rightarrow 2} (s-2) \left( \frac{e^{st}}{s-2} \right) = e^{2t}$$

(c) 由第 4 題及(a)(b)之結論，可知

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t} f(s) \text{ 的留數和 } = e^{2t}$$

在此布拉威齊路徑中的  $r$ ，乃是任意大於 2 的實數，且此路徑包含極點  $s = 2$ 。

### 7.6 利用留數法，計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$

圖 因此題中的  $f(s)$  滿足(5)式（此可由第 5 題或第 15 題而得），故

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} ds \\ &= \sum \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \text{ 在極點 } s = -1 \text{ 和 } s = 2 \text{ 的留數}\end{aligned}$$

在單極點  $s = -1$  的留數為

$$\lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \left\{ \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right\} = \frac{1}{9} e^{-t}$$

在雙重極點  $s = 2$  的留數為

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[ (s-2)^2 \left\{ \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right\} \right] &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{e^{st}}{s+1} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s+1)te^{st} - e^{st}}{(s+1)^2} = \frac{1}{3} te^{2t} - \frac{1}{9} e^{2t}\end{aligned}$$

故  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \sum \text{留數} = \frac{1}{9} e^{-t} + \frac{1}{3} te^{2t} - \frac{1}{9} e^{2t}$

### 7.7 計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right\}$

圖 如同第 6 題，所求即為下式在 3 階極點  $s = -1$  及 2 階極點  $s = 1$  的留數和

$$\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}$$

在  $s = -1$  的留數為

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s+1)^3 \frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{se^{st}}{(s-1)^2} \right] = \frac{1}{16} e^{-t} (1 - 2t^2)$$

在  $s = 1$  的留數為

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[ (s-1)^2 \frac{se^{st}}{(s+1)^3 (s-1)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{se^{st}}{(s+1)^3} \right] = \frac{1}{16} e^t (2t-1)$$

$$\text{故 } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+1)^3 (s-1)^2} \right\} = \Sigma \text{ 留數 } = \frac{1}{16} e^{-t} (1-2t^2) + \frac{1}{16} e^t (2t-1)$$

### 7.8 計算 $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}$

因  $\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{[(s+i)(s-i)]^2} = \frac{1}{(s+i)^2 (s-i)^2}$

所求即為下式在 2 階極點  $s = i$  及  $s = -i$  的留數和

$$\frac{e^{st}}{(s+i)^2 (s-i)^2}$$

在  $s = i$  的留數為

$$\lim_{s \rightarrow i} \frac{d}{ds} \left[ (s-i)^2 \frac{e^{st}}{(s+i)^2 (s-i)^2} \right] = -\frac{1}{4} t e^{it} - \frac{1}{4} i e^{it}$$

在  $s = -i$  的留數為

$$\lim_{s \rightarrow -i} \frac{d}{ds} \left[ (s+i)^2 \frac{e^{st}}{(s+i)^2 (s-i)^2} \right] = -\frac{1}{4} t e^{-it} + \frac{1}{4} i e^{-it}$$

上式亦可由在前一式中，以  $-i$  取代  $i$  而得。故

$$\begin{aligned} \Sigma \text{ 留數} &= -\frac{1}{4} t (e^{it} + e^{-it}) - \frac{1}{4} i (e^{it} - e^{-it}) \\ &= -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

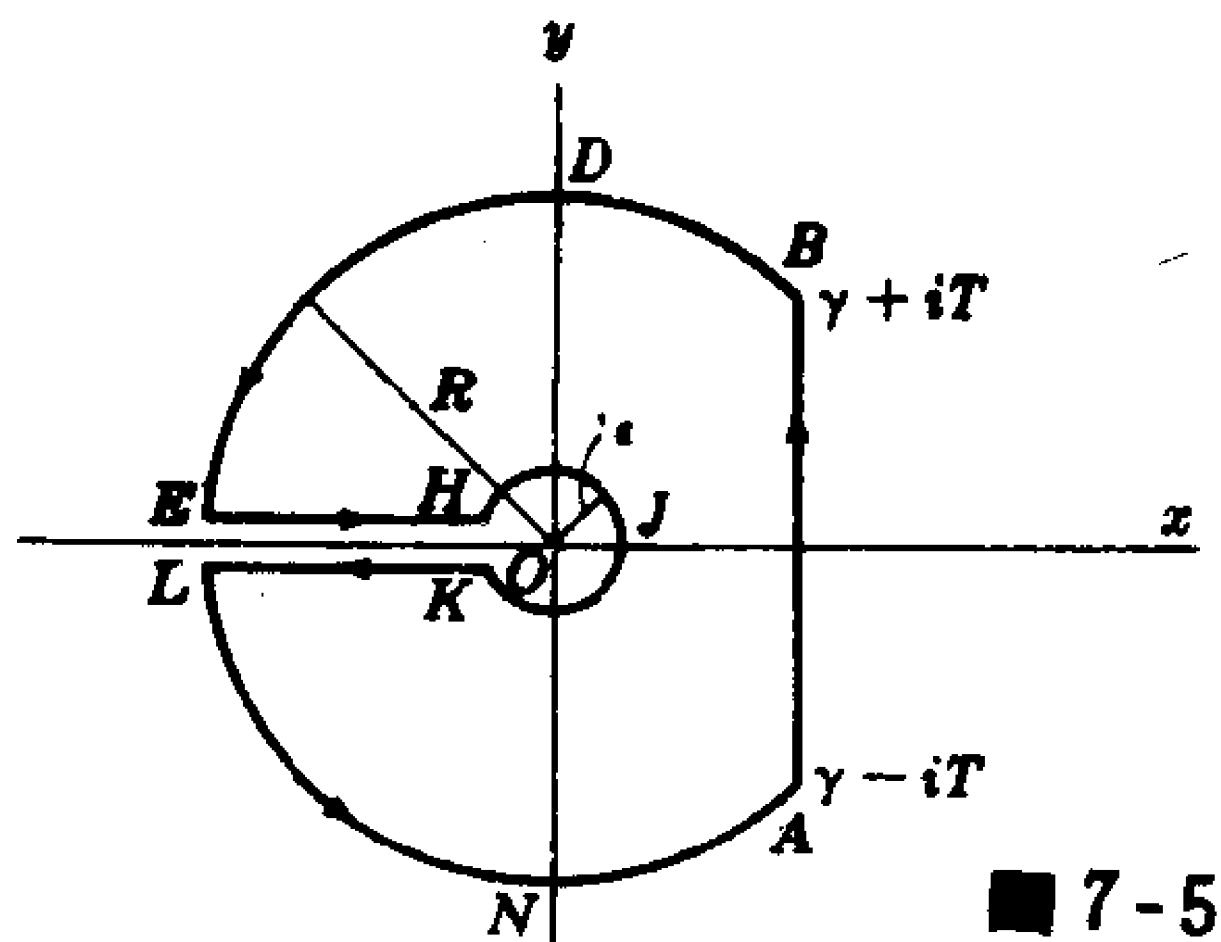
可和第 2 章第 18 題比較之。

### 具有分枝點之函數的反拉氏變換

#### 7.9 利用複數反變換公式，求 $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right\}$

圖 由複數反變換公式，所求之反拉氏變換為

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds \quad (1)$$



但因  $s = 0$  為被積函數的分枝點，故我們先考慮

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{BDE} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{EH} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{HJK} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{KL} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{LNA} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds \end{aligned}$$

其中  $C$  為圖 7-5 之路徑，包含直線  $AB$  ( $x = \gamma$ )，弧形  $BDE$  及  $GNA$  (均為圓心在原點  $O$ ，半徑為  $R$  之圓的一部份)，以及弧形  $HJK$  (為圓心  $O$ ，半徑  $\epsilon$  之圓的一部份)。

因被積函數的唯一奇點  $s = 0$  並不在  $C$  的內部，故由柯西定理，上式左端為零。又，被積函數滿足第 2 題的條件 (見 61 題)，故當  $R \rightarrow \infty$  時，沿  $BDE$  及  $LNA$  的積分值均趨近於零，故

$$\begin{aligned} F(t) &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds \\ &= - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{EH} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \int_{HJK} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \int_{KL} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

沿  $EH$  時， $s = xe^{\pi i}$ ， $\sqrt{s} = \sqrt{x}e^{\pi i/2} = i\sqrt{x}$  且當  $s$  由  $-R$  變至  $-\epsilon$  時， $x$  從  $R$  變至  $\epsilon$ 。

$$\int_{EH} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_R^{\epsilon} \frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x} dx$$

同理，沿  $KL$  時， $s = xe^{-\pi i}$ ， $\sqrt{s} = \sqrt{x}e^{-\pi i/2} = -i\sqrt{x}$  且當  $s$  從  $-\epsilon$  變至  $-R$  時， $x$  從  $\epsilon$  變至  $R$ ，

$$\int_{KL} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x} dx$$

沿  $HJK$  時， $s = \epsilon e^{i\theta}$ ，故

$$\begin{aligned} \int_{HJK} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds &= \int_{\pi}^{-\pi} \frac{e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}} d\theta \end{aligned}$$

由上可知(2)式可化為

$$F(t) = - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_R^{\epsilon} \frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x} dx + i \int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}} d\theta \right\}$$



$$\begin{aligned}
&= -\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-xt}(e^{a\sqrt{x}} - e^{-a\sqrt{x}})}{x} dx + i \int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta} t - a\sqrt{\epsilon} e^{i\theta/2}} d\theta \right\} \\
&= -\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi i} \left\{ 2i \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx + i \int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta} t - a\sqrt{\epsilon} e^{i\theta/2}} d\theta \right\}
\end{aligned}$$

因極限符號可放入積分符號內，故

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta} t - a\sqrt{\epsilon} e^{i\theta/2}} d\theta = \int_{\pi}^{-\pi} 1 d\theta = -2\pi$$

因此 
$$F(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx \quad (3)$$

上式可寫為（見第10題）

$$F(t) = 1 - \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t}) = \operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t}) \quad (4)$$

7.10 證明  $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx = \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$  由此使第9題的最後結果(4)式得以成立。

圖 令  $x = u^2$ ，所求積分變為

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2 t} \sin au}{u} du$$

對  $a$  微分，並利用第1章183題，得

$$-\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2 t} \cos au du = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-a^2/4t} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$$

故（利用  $a = 0$  時， $I$  亦為零）

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-p^2/4t} dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2} du = \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$$

故得證。

7.11 求  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\}$

圖 若  $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則  $\mathcal{L}\{F'(t)\} = s f(s) - F(0) = s f(s)$  其中假設  $F(0) = 0$ ，故若

$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  且  $F(0) = 0$ ，則  $\mathcal{L}^{-1}\{s f(s)\} = F'(t)$

由第9題及第10題，可得

$$F(t) = \operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2} du$$

故  $F(0) = 0$  且 
$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$$

由以上可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\} &= F'(t) = \frac{d}{dt} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2} du \right\} \\ &= -\frac{a}{\sqrt{\pi}} t^{-3/2} e^{-a^2/4t}\end{aligned}$$

### 具有無限多奇點之函數的反拉氏變換

7.12 求  $f(s) = \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}$  的所有奇點，其中  $0 < x < 1$ 。

圖 因  $\sqrt{s}$  的出現， $s = 0$  似乎是分枝點，但事實不然，可由下式看出

$$\begin{aligned}f(s) &= \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} = \frac{1 + (x\sqrt{s})^2/2! + (x\sqrt{s})^4/4! + \cdots}{s(1 + (\sqrt{s})^2/2! + (\sqrt{s})^4/4! + \cdots)} \\ &= \frac{1 + x^2s/2! + x^4s^2/4! + \cdots}{s(1 + s/2! + s^2/4! + \cdots)}\end{aligned}$$

由上可看出  $s = 0$  並非分枝點，而是單極點。

函數  $f(s)$  具有無限多極點，可由下列方程式之根求得

$$\cosh \sqrt{s} = \frac{e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}}{2} = 0$$

$$\text{即 } e^{2\sqrt{s}} = -1 = e^{i\pi + 2k\pi i} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{故 } \sqrt{s} = (k + \frac{1}{2})\pi i \quad \text{即 } s = -(k + \frac{1}{2})^2\pi^2$$

這些是單極點（見 56 題）。

故  $f(s)$  在下列各值為單極點

$$s = 0 \text{ 及 } s = s_n \text{ 其中 } s_n = -(n - \frac{1}{2})^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

7.13 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}\right\}$  其中  $0 < x < 1$ 。

圖 可由圖 7-6 的布拉威齊路徑來求得答案。其中直線  $AB$  的選取，乃是要使所有的極點（參見 12 題）

$$\begin{aligned}s = 0 \text{ 及 } s = s_n &= -(n - \frac{1}{2})^2\pi^2, \\ n &= 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

均在直線  $AB$  的左方。

而曲線  $BDEFGHA$  乃為圓  $\Gamma_m$   
(圓心在原點，半徑  $R_m = m^2\pi^2$ )

$$R_m = m^2\pi^2$$

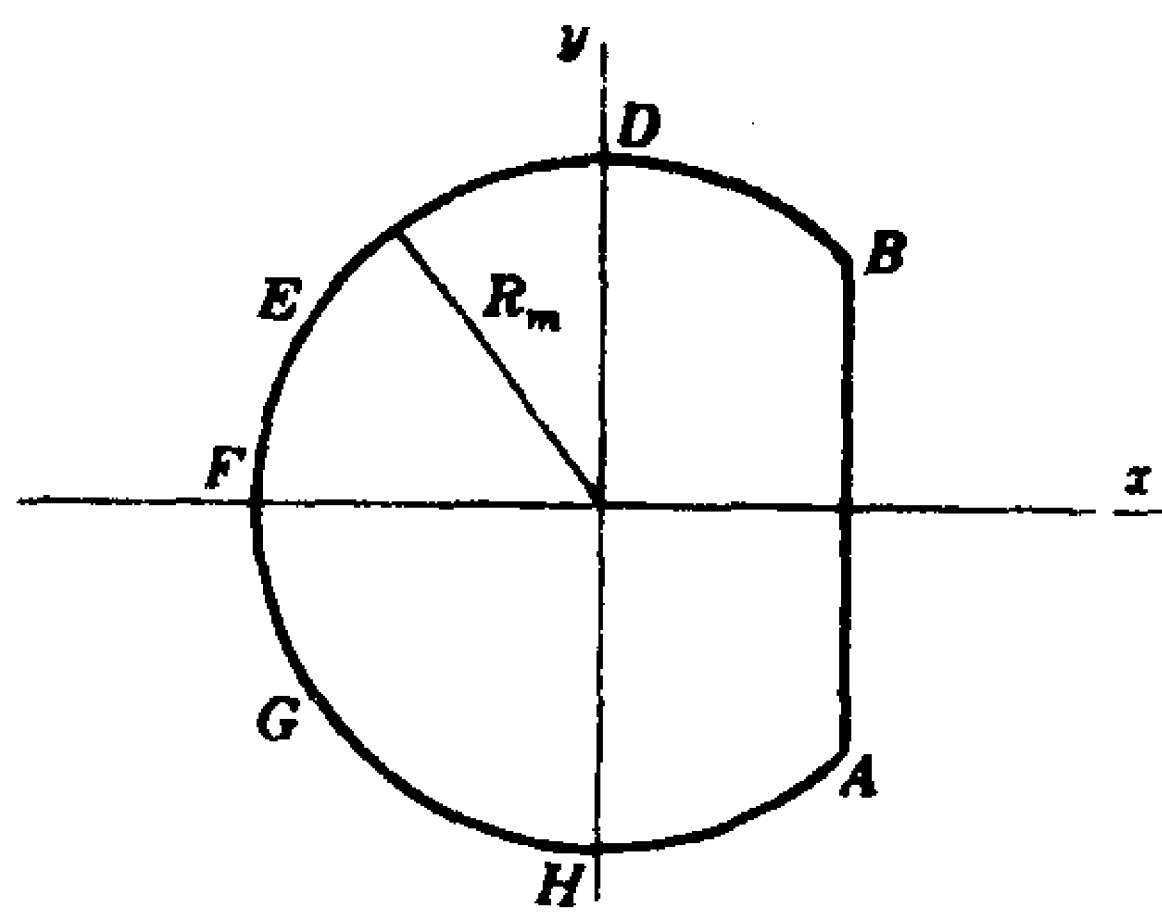


圖 7-6

之一部份，其中  $m$  為正整數。半徑  $R_m$  的選定使得此路徑不包含任一極點。

我們現在要計算在

$$\frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}$$

之極點的留數。即

$$\text{在 } s=0 \text{ 的留數爲 } \lim_{s \rightarrow 0} (s-0) \left\{ \frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} \right\} = 1$$

在  $s = -(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  的留數為

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_n} (s - s_n) \left\{ \frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} \right\} &= \lim_{s \rightarrow s_n} \left\{ \frac{s - s_n}{\cosh \sqrt{s}} \right\} \lim_{s \rightarrow s_n} \left\{ \frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s} \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_n} \left\{ \frac{1}{(\sinh \sqrt{s})(1/2\sqrt{s})} \right\} \lim_{s \rightarrow s_n} \left\{ \frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s} \right\} \\ &= \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 t} \cos(n - \frac{1}{2})\pi x \end{aligned}$$

若  $C_m$  為圖 7-6 的路徑，則

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_m} \frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} ds = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 t} \cos(n - \frac{1}{2})\pi x$$

令  $m \rightarrow \infty$ ，則沿  $\Gamma_m$  的積分趨近於零（見 54 題），故得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} \right\} &= 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 t} \cos(n - \frac{1}{2})\pi x \\ &= 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} \end{aligned}$$

7.14 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa} \right\}$  其中  $0 < x < a$ 。

圖 函數  $f(s) = \frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}$  之極點為  $s=0$  及滿足  $\cosh sa=0$  之點，即

$$s = s_k = (k + \frac{1}{2})\pi i/a \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

由於  $s^2$  的出現， $s=0$  似乎是 2 階極點，但事實不然，因當  $s$  接近零時

$$\begin{aligned} \frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa} &= \frac{sx + (sx)^3/3! + (sx)^5/5! + \dots}{s^2 \{1 + (sa)^2/2! + (sa)^4/4! + \dots\}} \\ &= \frac{x + s^2 x^3/3! + s^4 x^5/5!}{s \{1 + s^2 a^2/2! + s^4 a^4/4! + \dots\}} \end{aligned}$$

由上式可知  $s=0$  為 1 階極點，即單極點。極點  $s_k$  亦為單極點（見 56 題）。

如同 13 題，我們可得  $e^{st} f(s)$  在上述極點的留數。

在  $s = 0$  的留數為

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s-0) \left\{ \frac{e^{st} \sinh sx}{s^2 \cosh sa} \right\} = \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sinh sx}{s} \right\} \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{st}}{\cosh sa} \right\} = x$$

其中用到羅哈士比托規則。

在  $s = s_k$  的留數為

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_k} (s-s_k) \left\{ \frac{e^{st} \sinh sx}{s^2 \cosh sa} \right\} &= \left\{ \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{s-s_k}{\cosh sa} \right\} \left\{ \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{e^{st} \sinh sx}{s^2} \right\} \\ &= \left\{ \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{1}{a \sinh sa} \right\} \left\{ \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{e^{st} \sinh sx}{s^2} \right\} \\ &= \frac{1}{a i \sin(k + \frac{1}{2})\pi} \cdot \frac{e^{(k + \frac{1}{2})\pi it/a} i \sin(k + \frac{1}{2})\pi x/a}{-(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2/a^2} \\ &= \frac{a(-1)^k e^{(k + \frac{1}{2})\pi it/a} \sin(k + \frac{1}{2})\pi x/a}{\pi^2(k + \frac{1}{2})^2} \end{aligned}$$

利用適當的求極限程序（如同 13 題），求出留數之和，故得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa} \right\} &= x - \frac{a}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{(k + \frac{1}{2})\pi it/a} \sin(k + \frac{1}{2})\pi x/a}{(k + \frac{1}{2})^2} \\ &= x + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n - \frac{1}{2})\pi t/a \sin(n - \frac{1}{2})\pi x/a}{(n - \frac{1}{2})^2} \\ &= x + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a} \end{aligned}$$

### 其他各類問題

7.15 令  $f(s) = P(s)/Q(s)$ ，其中  $P(s)$  及  $Q(s)$  均為多項式，且  $P(s)$  之次數小於  $Q(s)$ 。證明  $f(s)$  滿足第 2 題中的條件。

圖 令

$$P(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m$$

$$Q(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n$$

其中  $a_0 \neq 0$ ， $b_0 \neq 0$  且  $0 \leq m < n$ ，若  $s = Re^{i\theta}$ ，則

$$|f(s)| = \left| \frac{P(s)}{Q(s)} \right| = \left| \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{a_0 R^m e^{mi\theta} + a_1 R^{m-1} e^{(m-1)i\theta} + \dots + a_m}{b_0 R^n e^{ni\theta} + b_1 R^{n-1} e^{(n-1)i\theta} + \dots + a_n} \right| \\
&= \left| \frac{a_0}{b_0} \right| \frac{1}{R^{n-m}} \left| \frac{1 + (a_1/a_0 R) e^{-i\theta} + (a_2/a_0 R^2) e^{-2i\theta} + \dots + (a_m/a_0 R^m) e^{-mi\theta}}{1 + (b_1/b_0 R) e^{-i\theta} + (b_2/b_0 R^2) e^{-2i\theta} + \dots + (b_n/b_0 R^n) e^{-ni\theta}} \right|
\end{aligned}$$

令  $A$  爲  $|a_1/a_0|, |a_2/a_0|, \dots, |a_m/a_0|$  之中最大者,

且  $B$  爲  $|b_1/b_0|, |b_2/b_0|, \dots, |b_n/b_0|$  之中最大者,

則

$$\begin{aligned}
\left| 1 + \frac{a_1}{a_0 R} e^{-i\theta} + \frac{a_2}{a_0 R^2} e^{-2i\theta} + \dots + \frac{a_m}{a_0 R^m} e^{-mi\theta} \right| &\leq 1 + \frac{A}{R} + \frac{A}{R^2} + \dots + \frac{A}{R^m} \\
&\leq 1 + \frac{A}{R} \left( 1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \dots \right) \\
&\leq 1 + \frac{A}{R-1} < 2
\end{aligned}$$

其中  $R > A + 1$

$$\begin{aligned}
\text{又, } \left| 1 + \frac{b_1}{b_0 R} e^{-i\theta} + \frac{b_2}{b_0 R^2} e^{-2i\theta} + \dots + \frac{b_n}{b_0 R^n} e^{-ni\theta} \right| \\
&\geq 1 - \left| \frac{b_1}{b_0 R} e^{-i\theta} + \frac{b_2}{b_0 R^2} e^{-2i\theta} + \dots + \frac{b_n}{b_0 R^n} e^{-ni\theta} \right| \\
&\geq 1 - \left( \frac{B}{R} + \frac{B}{R^2} + \dots + \frac{B}{R^n} \right) \\
&\geq 1 - \frac{B}{R} \left( 1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \dots \right) \\
&\geq 1 - \frac{B}{R-1} \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

其中  $R > 2B + 1$

故只要  $R$  大於  $A + 1$  或  $2B + 1$ , 就有

$$|f(s)| \leq \left| \frac{a_0}{b_0} \right| \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \cdot \frac{1}{1/2} \leq \frac{M}{R^k}$$

其中  $M$  爲大於  $2 |a_0/b_0|$  的任意常數, 且  $k = n - m \geq 1$  故得證。

7.16 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}} \right\}$  其中  $0 < x < a$ 。

圖 (a) 解 1: 由 13 題可得

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} \right\} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

以  $ks$  取代  $s$ , 由標度改變性質可知

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh x\sqrt{ks}}{ks \cosh \sqrt{ks}} \right\} = \frac{1}{k} \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4k} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right\}$$

將上式乘上  $k$ ，並以  $a^2$  取代  $k$ ，以  $x/a$  取代  $x$ ，即可得所求答案

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}} \right\} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

解 2：可直接由反變換公式求得，如同 13 題。

7.17 求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\cosh sx}{s^3 \cosh sb} \right\}$  其中  $0 < x < b$ 。

圖 令  $f(s) = \frac{\cosh sx}{s^3 \cosh sb}$ ，則  $s = 0$  為 3 階極點，而  $s = s_k = (2k+1)\pi i/2b$ ， $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (為  $\cosh sb = 0$  之根) 為單極點。如同 13 題的方法， $e^{st} f(s)$  在  $s = s_k$  的留數為

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \left\{ \frac{e^{st} \cosh sx}{s^3 \cosh sb} \right\} &= \left\{ \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{s - s_k}{\cosh sb} \right\} \left\{ \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{e^{st} \cosh sx}{s^3} \right\} \\ &= \frac{1}{b \sinh (2k+1)\pi i/2} \cdot \frac{e^{(2k+1)\pi i t/2b} \cosh (2k+1)\pi i x/2b}{\{(2k+1)\pi i/2b\}^3} \\ &= \frac{(-1)^k 8b^2 e^{(2k+1)\pi i t/2b}}{(2k+1)\pi^3} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2b} \end{aligned}$$

欲求在  $s = 0$  的留數，見下式

$$\begin{aligned} \frac{e^{st} \cosh sx}{s^3 \cosh sb} &= \frac{1}{s^3} \left( 1 + st + \frac{s^2 t^2}{2!} + \dots \right) \left\{ \frac{1 + s^2 x^2/2! + s^4 x^4/4! + \dots}{1 + s^2 b^2/2! + s^4 b^4/4! + \dots} \right\} \\ &= \frac{1}{s^3} \left( 1 + st + \frac{s^2 t^2}{2!} + \dots \right) \left( 1 + \frac{s^2 x^2}{2!} + \frac{s^4 x^4}{4!} + \dots \right) \left( 1 - \frac{s^2 b^2}{2} + \frac{5s^4 b^4}{24} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{s^3} \left\{ 1 + st + \frac{s^2 t^2}{2} + \frac{s^2 x^2}{2} - \frac{s^2 b^2}{2} + \dots \right\} \end{aligned}$$

故留數 (為上式級數中， $1/s$  的係數) 為  $\frac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2)$

在  $s = 0$  的留數也可由下式計算出

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ (s-0)^3 \frac{e^{st} \cosh sx}{s^3 \cosh sb} \right\}$$

所求之拉氏變換，即為上述之留數和，故為

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2) + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{(2k+1)\pi i t/2b}}{(2k+1)^3} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2b} \\ = \frac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2) - \frac{16b^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2b} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \end{aligned}$$

這就是附錄B中表格的第123條。

7.18 一週期性電壓  $E(t)$ ，為方波之形式（見圖7-7），將此電源加於圖7-8之電路。假設在時間  $t = 0$  時，電流為零，試求其後任意時間之電流值。

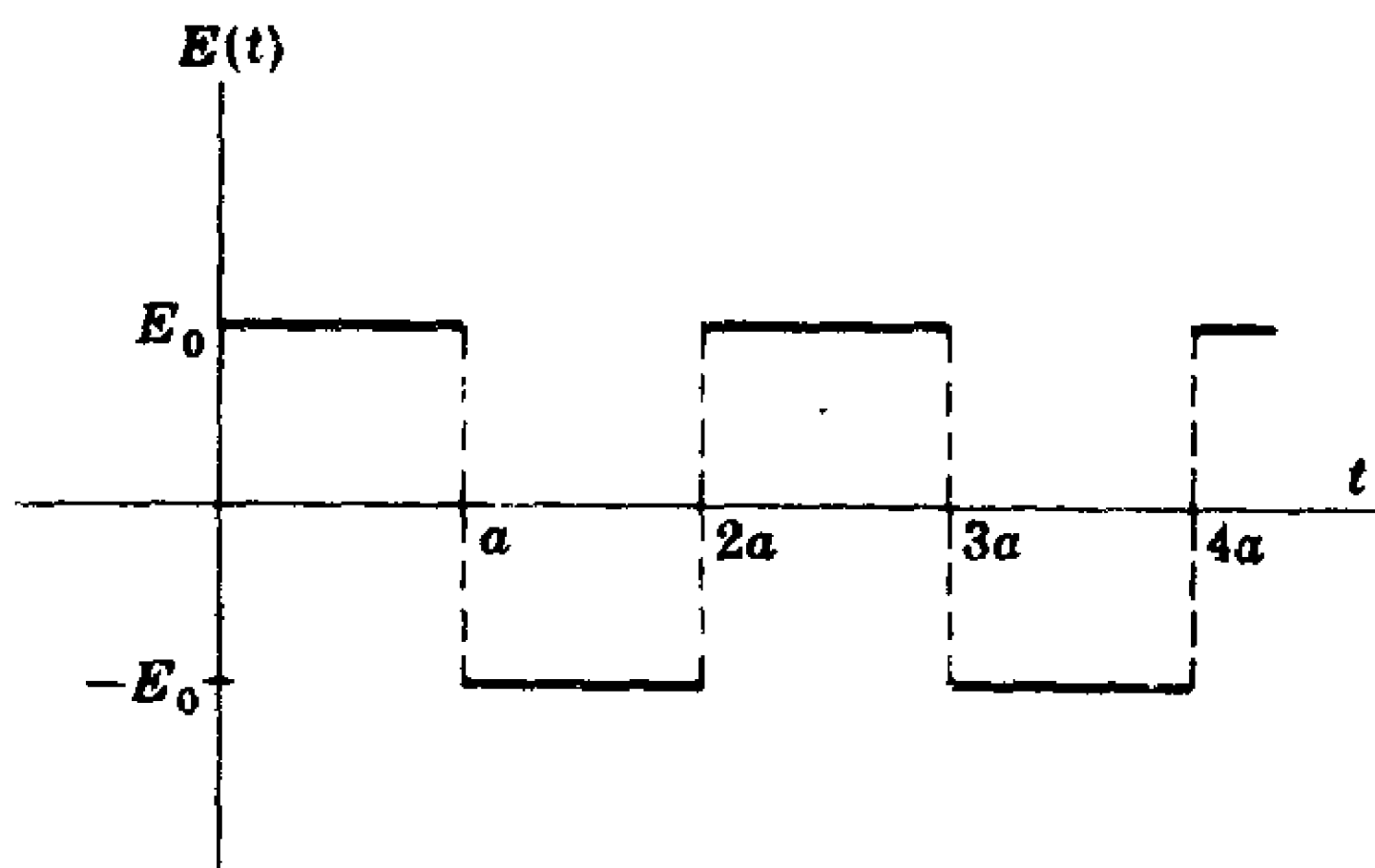


圖 7-7

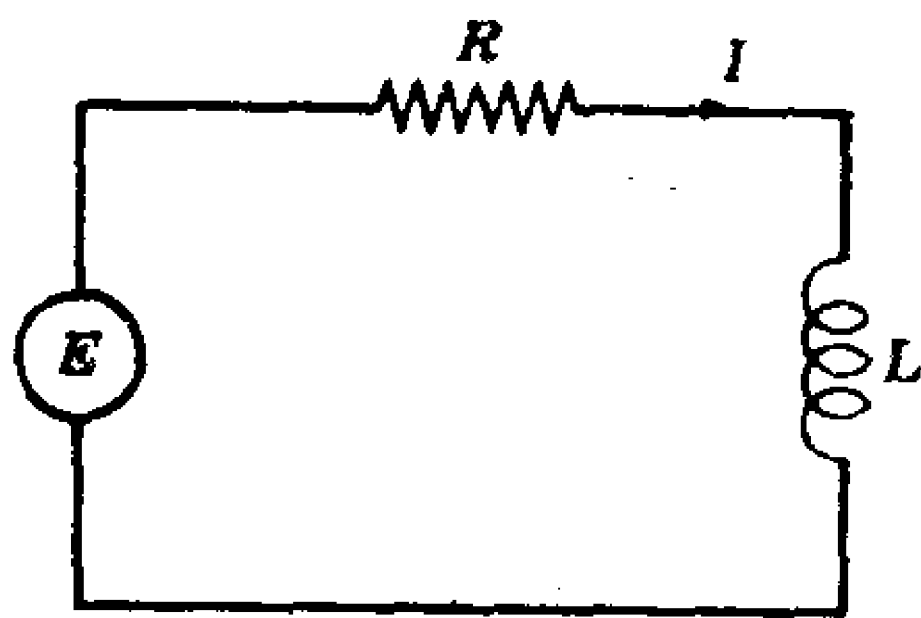


圖 7-8

圖 電路中之電流  $I(t)$  的微分方程式為

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t) \quad \text{其中} \quad I(0) = 0 \quad (1)$$

取拉氏變換，並利用附錄B表格中的135條，可得

$$Ls\tilde{I} + R\tilde{I} = \frac{E_0}{s} \tanh \frac{as}{2} \quad \text{即} \quad \tilde{I}(s) = \frac{E_0}{s(Ls + R)} \tanh \frac{as}{2}$$

其中  $\tilde{I}(s) = \mathcal{L}\{I(t)\}$  故

$$I(t) = \frac{E_0}{L} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + R/L)} \tanh \frac{as}{2} \right\} \quad (2)$$

函數  $f(s) = \frac{1}{s(s + R/L)} \tanh \frac{as}{2}$  之單極點為  $s = -R/L$  及滿足  $\cosh(as/2) = 0$  之點，即  $s = s_k = (2k+1)\pi i/a$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ （可和17題比較之）。 $s = 0$  並非極點，因為  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tanh(as/2)}{s} = \frac{a}{2}$  不為無限大，故  $s = 0$  應為可去奇點。

如同在13及17題中的解法，我們必須求得  $e^{st}f(s)$  在上述極點的留數，如下：

在  $s = -R/L$  的留數為

$$\lim_{s \rightarrow -R/L} (s + R/L) \left\{ \frac{e^{st}}{s(s + R/L)} \tanh \frac{as}{2} \right\} = \frac{L}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L}$$

在  $s = s_k = (2k+1)\pi i/a$  的留數為

$$\lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \left\{ \frac{e^{st}}{s(s + R/L)} \tanh \frac{as}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{s - s_k}{\cosh(as/2)} \right\} \left\{ \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{e^{st} \sinh(as/2)}{s(s + R/L)} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{1}{(a/2) \sinh(as_k/2)} \right\} \left\{ \frac{e^{s_k t} \sinh(as_k/2)}{s_k(s_k + R/L)} \right\} \\
 &= \frac{2e^{(2k+1)\pi i t/a}}{(2k+1)\pi i \{(2k+1)\pi i/a + R/L\}}
 \end{aligned}$$

故留數之和為

$$\begin{aligned}
 &\frac{L}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2e^{(2k+1)\pi i t/a}}{(2k+1)\pi i \{(2k+1)\pi i/a + R/L\}} \\
 &= \frac{L}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{aR \sin(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L \cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)\{a^2 R^2 + (2n-1)^2 \pi^2 L^2\}}
 \end{aligned}$$

故由(2)式可得所求為

$$I(t) = \frac{E_0}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L} + \frac{2E_0}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{aR \sin(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L \cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)\{a^2 R^2 + (2n-1)^2 \pi^2 L^2\}}$$

上式可改寫為

$$I(t) = \frac{E_0}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L} + \frac{2E_0}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\{(2n-1)\pi t/a - \phi_n\}}{(2n-1)\{a^2 R^2 + (2n-1)^2 \pi^2 L^2\}^{1/2}}$$

其中  $\phi_n = \tan^{-1}\{(2n-1)\pi L/aR\}$

## 補充題

### 複數反變換公式及留數定理的應用

7.19 利用複數反變換公式計算下列各式：

$$(a) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + a^2} \right\} \quad (b) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + a^2} \right\} \quad (c) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} \right\}$$

$$\text{答} \quad (a) \cos at, \quad (b) (\sin at)/a, \quad (c) \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t})$$

7.20 利用複數反變換公式，求下列各式的反拉氏變換。

$$(a) 1/(s+1)^2, \quad (b) 1/s^2(s^2+1)$$

$$\text{答} \quad (a) te^{-t}, \quad (b) \frac{1}{2}t^2 + \cos t - 1$$

7.21 (a)證明  $f(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$  滿足反變換公式的條件，(b)求  $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$

$$\text{答} \quad (b) e^{2t} - e^t$$

7.22 計算  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2}{(s^2+4)^2} \right\}$ ，並仔細驗證每一步驟。



$$\text{圖} \quad \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t$$

7.23 (a) 計算  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2+1)^3} \right\}$ ，並仔細驗證每一步驟

(b) 驗算答案是否正確。

7.24 (a) 計算  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{se^{st}}{(s^2+1)^2} ds$ ，積分路徑  $C$  如圖

7-9 所示，其中  $R \geq 3$ ， $r > 1$ 。

(b) 由拉氏變換理論的觀點來解釋你的答案。

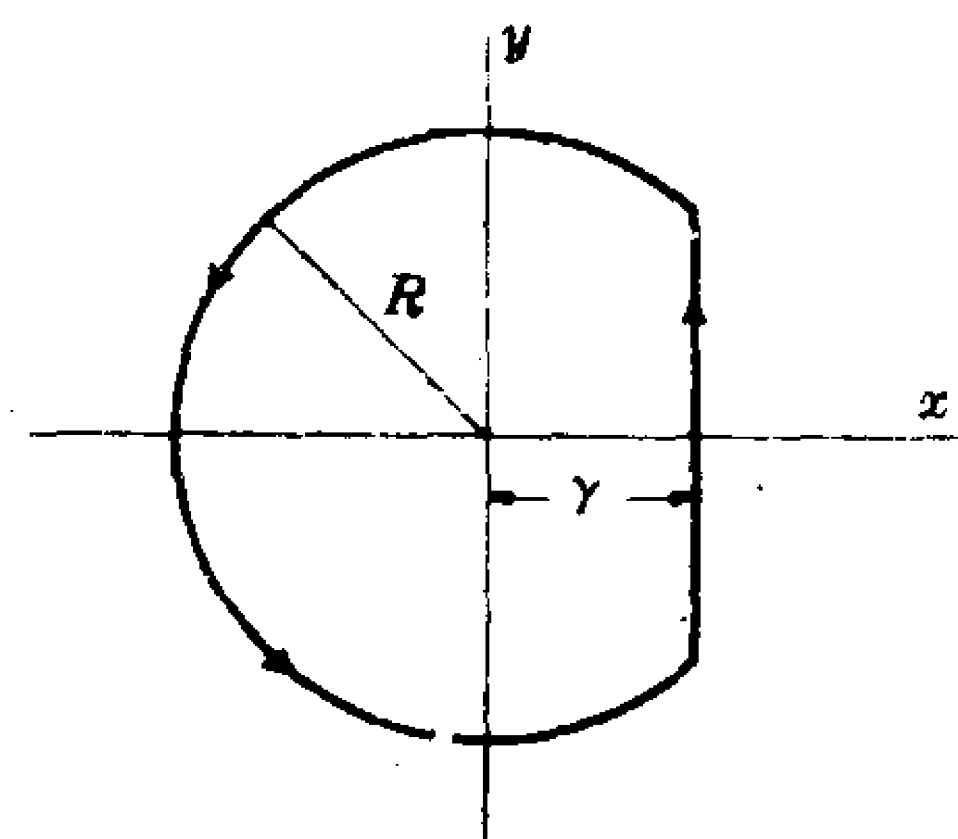


圖 7-9

7.25 利用反變換公式計算  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+a)(s-b)^2} \right\}$ ，其中

$a, b$  為任意大於零的常數。

7.26 利用反變換公式計算(a)第2章第13題(b)第2章第25題(c)第2章第28題(d)第2章第110題。

### 具有分枝點之函數的反拉氏變換

7.27 利用複數反變換公式求  $\mathcal{L}^{-1} \{s - \sqrt{s}\}$

7.28 由反變換公式求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \right\}$

7.29 利用反變換公式，證明  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s\sqrt{s+1}} \right\} = \text{erf} \sqrt{t}$

7.30 利用反變換公式求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{s}}{s-1} \right\}$

7.31 (a)利用複數反變換公式，計算  $\mathcal{L}^{-1} \{s^{-1/3}\}$  (b)再用其他方法驗證你的答案。

7.32 利用反變換公式，計算  $\mathcal{L}^{-1} \{\ln(1+1/s)\}$ 。圖  $(1-e^{-t})/t$

7.33 由反變換公式計算  $\mathcal{L}^{-1} \{\ln(1+1/s^2)\}$ 。圖  $2(1-\cos t)/t$

### 具有無限多奇點之函數的反拉氏變換

7.34 利用複數反變換公式，求  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(e^s+1)} \right\}$

7.35 證明  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s \cosh s} \right\} = 1 - \frac{4}{\pi} \left\{ \cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{2} - \dots \right\}$ 。

7.36 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 \sinh s}\right\}$ 。圖  $\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (1 - \cos n\pi t)$

7.37 利用複數反變換公式，證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 \sinh as}\right\} = \frac{t(t^2 - a^2)}{6a} - \frac{2a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin \frac{n\pi t}{a}$$

7.38 證明  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + \omega^2)(1 + e^{-2as})}\right\} = \frac{\sin \omega(t+a)}{2\omega} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi t/2a}{\omega^2 - (2n-1)^2\pi^2/4a^2}$

### 其他各類問題

7.39 利用複數反變換公式，計算 (a)  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-1)^4\}$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}/(s-1)^4\}$

7.40 利用線積分，求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right\}$ 。圖  $t \cos t$

7.41 計算  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^4}\right\}$ 。圖  $\frac{1}{48}(3t^2 \cos t + (t^3 - 3t) \sin t)$

7.42 利用複數反變換公式，求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s(s-1)^2(s+1)}\right\}$ ，並以其他方法驗證之。

7.43 (a) 證明函數  $f(s) = \frac{1}{s^2 \cosh s}$  滿足定理 7-1 的條件。

(b) 證明  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 \cosh s}\right\} = t + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi t\right)$ 。

7.44 討論 43 題(b)及 35 題之結論的關係。

7.45 由反變換公式，並仔細驗證每一步驟，求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+4}\right\}$

圖  $\frac{1}{4}(\sin t \cosh t - \cos t \sinh t)$

7.46 (a) 證明當  $x > 0$  時

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-x\sqrt{s^2+\omega^2}}}{s^2+\omega^2}\right\} = e^{-x\sqrt{s^2+\omega^2}} \cos(\omega t - x\sqrt{\omega^2/2}) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ue^{-ut} \sin x\sqrt{u^2+\omega^2}}{u^2+\omega^2} du$$

(b) 證明當  $t$  很大時，(a)中的積分項將趨近於零。

7.47 證明當  $0 < x < 1$  時，  $\frac{\sinh xs}{s^2 \cosh s} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{s^2 + (2n-1)^2\pi^2/4}$

7.48 求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{csch}^2 s}{s}\right\}$

7.49 證明當  $0 < x < 1$  時,  $\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh \sqrt{s}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(2n-1)\pi x/2}{s + (2n-1)^2\pi^2/4}$

7.50 證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\ln(1+1/s^2)}{1+e^{-2as}}\right\} = \frac{1-\cos(t+a)}{t+a} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$$

7.51 證明當  $0 < x < a$  時,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh \sqrt{s}(a-x)}{\sinh \sqrt{s}a}\right\} = \frac{a-x}{a} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2 t/a^2}}{n} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

7.52 利用反變換公式, 求(a)第2章第3題(g), (b)第2章第9題(a), (c)第2章第14題。

7.53 利用反變換公式, 解  $Y^{(iv)}(t) - a^4 Y(t) = \sin at + e^{-at}$ , 已知條件為  $Y(0) = 2$ ,  $Y'(0) = 0$ ,  $Y''(0) = -1$ ,  $Y'''(0) = 0$

7.54 證明當  $R \rightarrow \infty$  時, 第13題中沿  $\Gamma$  的積分值將趨近於零。

7.55 利用複數反變換公式, 證明:(a)定理2-3, (b)定理2-5, (c)定理2-10。

7.56 證明在(a)12題及(b)14題中所找到的極點均為單極點(提示:若  $s=a$  為  $g(s)=0$  的重根, 則  $s=a$  必為  $g'(s)=0$  的單根)。

7.57 (a)計算  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{\sqrt{s+1}} ds$ , 其中  $\gamma > 0$ , (b)如何驗證你的答案?

答  $t > 0$  時, 原式為  $t^{-1/2} e^{-t/\sqrt{1}}$

$t < 0$  時, 原式為零。

7.58 完成第2題中, (a)情況3及(b)情況4的證明。

7.59 一週期電壓  $E(t)$  之波形為半波整流正弦曲線(如圖7-10), 將此電源加至圖7-11的電路。假設在  $t=0$  時, 電容上的電荷及電感上的電流均為零, 證明在其後之任意時間  $t$  時, 電容上的電荷為

$$Q(t) = \frac{\pi E_0}{LT^2 \alpha^3 \omega^2} + \frac{\pi E_0}{2LT} \left\{ \frac{\sin \omega t - \sin \omega(t+T)}{\omega(\alpha^2 - \omega^2)(1 - \cos \omega T)} + \frac{\sin \alpha t - \sin \alpha(t+T)}{\alpha(\omega^2 - \alpha^2)(1 - \cos \alpha T)} \right\} \\ + \frac{2\pi E_0}{LT^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n t/T}{(\omega^2 - 4\pi^2 n^2/T^2)(\alpha^2 - 4\pi^2 n^2/T^2)}$$

其中  $\omega^2 = 1/LC$ ,  $\alpha^2 = \pi^2/T^2$  且  $\omega \neq \alpha$ 。

4/13/2014 - 28/13/14

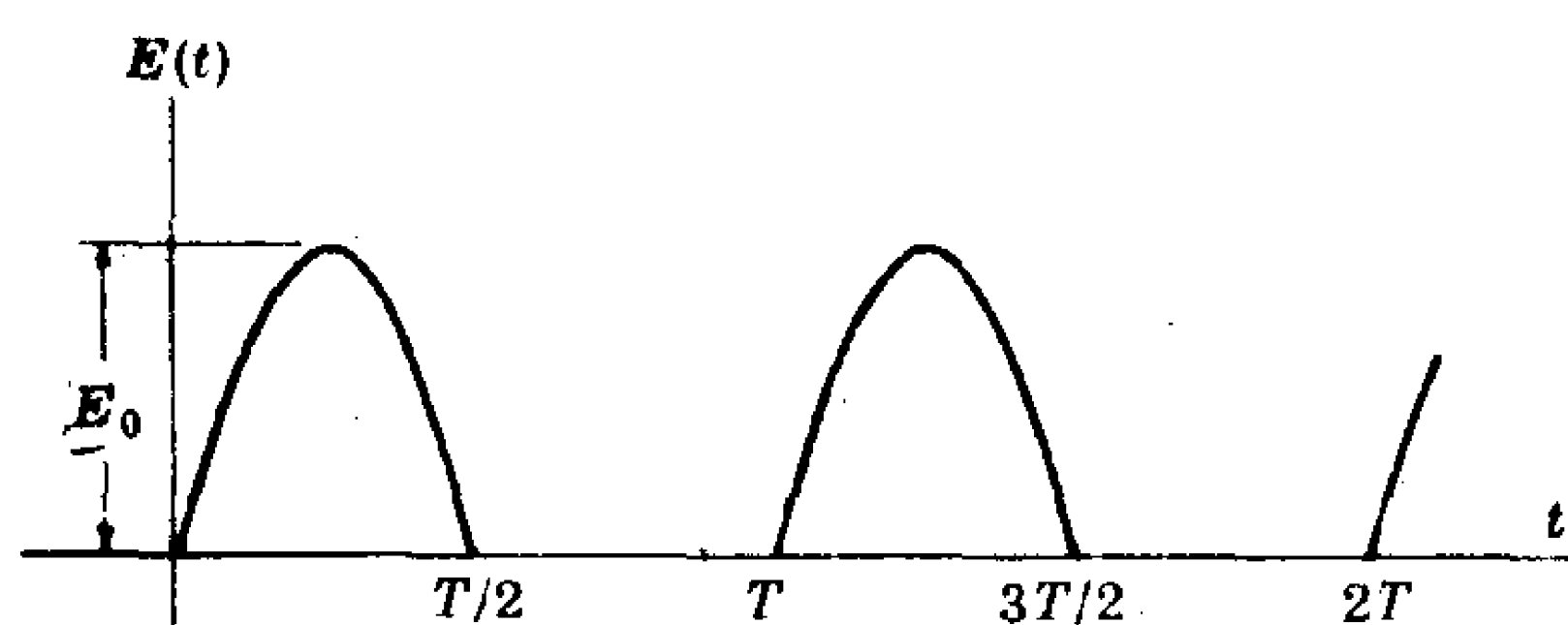


圖 7-10

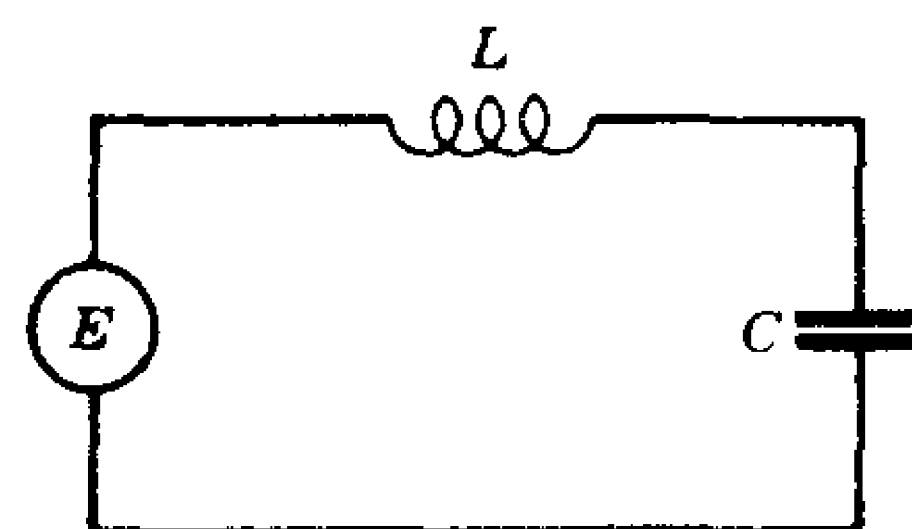


圖 7-11

7.60 若  $\alpha = \omega$ ，試重做 59 題，並討論其結果之物理意義。

7.61 對於函數  $e^{-a\sqrt{s}/s}$ ,  $a > 0$ ，驗證定理 7-1（見第 9 題）。

7.62 利用反變換公式，求  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(1-e^{-as})}\right\}$ ，其中  $a > 0$ ，並以其他方法驗證之。

7.63 證明  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s/3}\} = \frac{3}{\pi} \int_0^\infty v^2 e^{-v^3} \sin \frac{\sqrt{3}v}{2} dv$

7.64 推廣 63 題的結論。

7.65 一彈簧之彈力常數為  $k$ ，不計其本身之重量。將此彈簧垂直懸吊於一固定點，並在其尾端加掛質量為  $m$  的物體。將此物體自平衡點向下拉，使其位移為  $x_0$ ，然後釋放，此物體就開始振盪。若在每一次此物體到達最低點時，由  $t=0$  開始，並施加一單位脈衝之外力，試求在任意時間  $t > 0$  時，此物體的位置，並解釋其物理意義。



# 第八章

## 在邊界值問題方面的應用

### 8.1 和偏微分方程式有關的邊界值問題

許多在科學及工程方面的問題，若以數學形式描述之，常形成由1個或多個未知函數所構成的偏微分方程式，而且這些未知函數必須滿足由某些物理現象所引發的條件。

這些條件稱為邊界條件 (Boundary conditions)。求方程式的解，並滿足邊界條件，這就是邊界值問題 (Boundary-value problem)。

### 8.2 某些重要的偏微分方程式

#### 1. 一維熱傳導方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$U(x, t)$  代表在某物質中，位置  $x$ ，時間  $t$  的溫度。常數  $k$  稱為擴散係數 (Diffusivity)，等於  $K/c\rho$ ，其中熱傳導係數 (Thermal conductivity)  $K$ ，比熱 (Specific heat)  $c$  及密度 (Density，即單位體積之質量)  $\rho$  均假設為常數。在單位時間內，通過一平面上單位面積的熱量為  $-KU_x(x, t)$ 。

#### 2. 一維波動方程式

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

此方程式適用於一拉緊之柔軟細繩的微小橫振動 (見圖 8-1)。變數  $Y(x, t)$  為在時間  $t$  時，任意點  $x$  的位移，常數  $a^2 = T/\rho$ ，其中  $T$  為繩中之張力，為一常數

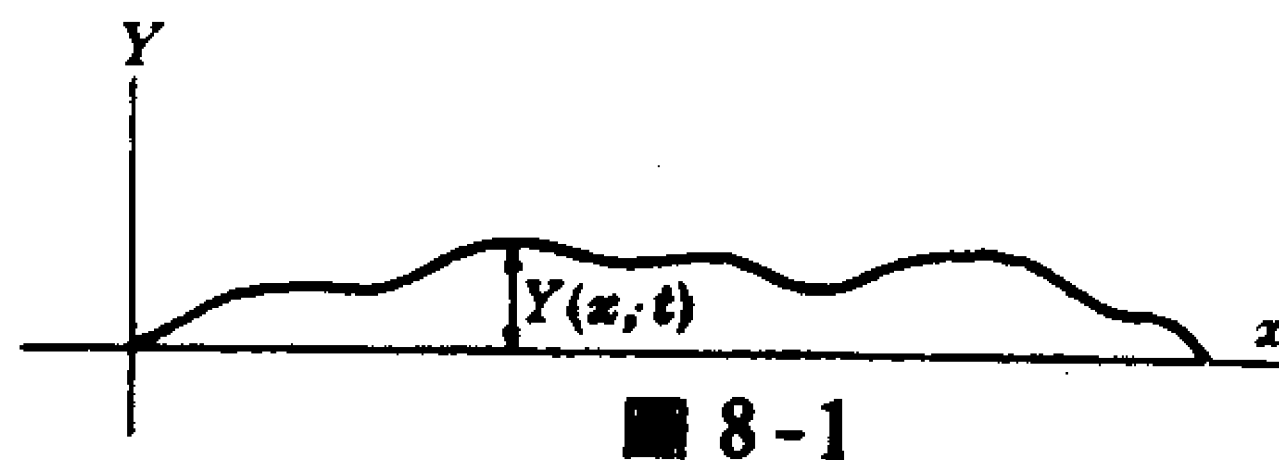


圖 8-1

，而  $\rho$  為單位長度之質量，亦為一常數。

### 3. 橫樑的縱振動

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

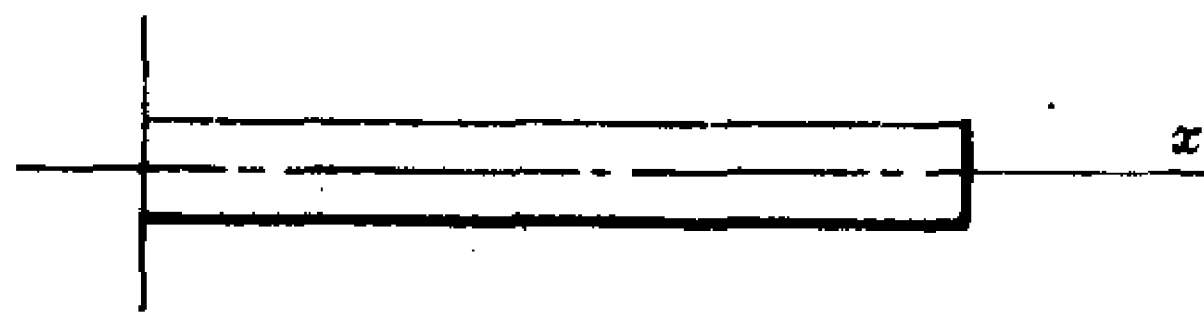


圖 8-2

此方程式描述橫樑沿縱方向（即  $x$  軸方向）之運動。變數  $Y(x, t)$  為在時間  $t$  時，橫切面  $x$  相對於平衡位置的位移。常數  $c^2 = gE/\rho$ ，其中  $g$  為重力加速度（Acceleration due to gravity）。 $E$  為彈性係數（Modulus of elasticity）（應力除以應變），和橫樑本身的性質有關，而  $\rho$  則為橫樑的密度（單位體積的質量）。

此方程式的形式和繩之振動的方程式是相同的。

### 4. 橫樑的橫振動

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0$$

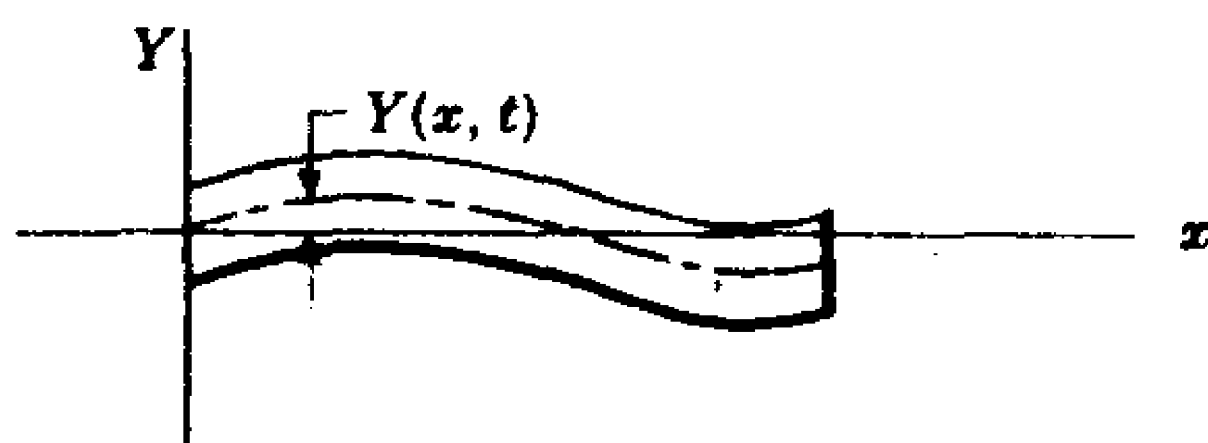


圖 8-3

此方程式描述橫樑（位於  $x$  軸上，見圖 8-3）在橫向（即垂直於  $x$  軸）的振動，其中  $Y(x, t)$  為在任意時間  $t$  時，任意點  $x$  的橫向位移或撓度。常數  $b^2$  等於  $EIg/\rho$ ，其中  $E$  為彈性係數， $I$  為任意橫截面對  $x$  軸所產生的慣性矩， $g$  為重力加速度，而  $\rho$  則為單位長度的質量。若對橫樑施以橫向之外力  $F(x, t)$  時，則原方程式的等號右端應修正為  $b^2 F(x, t)/EI$ 。

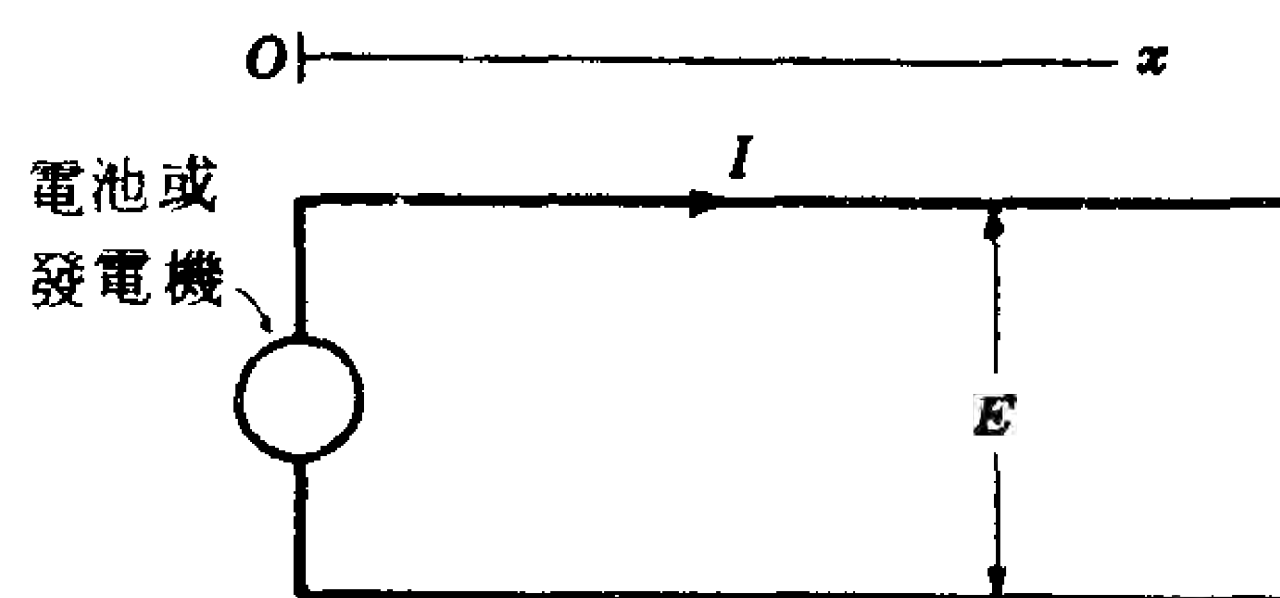
### 5. 圓柱體內的熱傳導

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

$U(r, t)$  代表任意時間  $t$  時，在圓柱體內距中心軸  $r$  處的溫度。在此假設熱量只能沿徑向傳播。

### 6. 傳輸線

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= -RI - L \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -GE - C \frac{\partial E}{\partial t}\end{aligned}$$



■ 8-4

此為在傳輸線（見圖 8-4）中，電流  $I$  及電壓  $E$  在任意點  $x$  及任意時間  $t$  的聯立方程式。常數  $R$ ， $L$ ， $G$ ， $C$  分別是單位長度的電阻、電感、電導及電容。端點  $x = 0$  稱為發送端（Sending end），而其他的  $x$  值均可視為接收端（Receiving end）。

### 8.3 二維及三維的問題

上述的偏微分方程式，有許多可推廣，並用來解 2 維或 3 維的問題。例如，若  $Z(x, y, t)$  代表在任意時間  $t$ ， $xy$  平面上之薄膜在任一點  $(x, y)$  的橫向位移，則此薄膜之橫向振動（假設振幅很小）可以下列方程式表示：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

同理，三維中之薄膜橫振動方程式為

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = a^2 \nabla^2 \phi \quad (2)$$

其中  $\nabla^2 \phi$  稱為  $\phi(x, y, z, t)$  的拉卜拉士式（Laplacian）。

在三維中的熱傳導方程式為（假設熱傳導係數，比熱及密度均為常數）

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = k \nabla^2 U \quad (3)$$

若為恒溫狀態，此時  $U$  不隨時間而變，即  $\partial U / \partial t = 0$ ，故方程式為

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U = 0 \quad (4)$$

上式稱為拉卜拉士方程式（Laplace's equation），亦為電荷（或質量）在沒有電荷（或質量）的空間所造成之電位（或重力位能）的方程式。



## 8.4 以拉卜拉士變換解邊界值問題

應用拉卜拉士變換（對  $t$  或對  $x$ ）於一維的邊界值問題，可使偏微分方程式（或方程組）轉化成常微分方程式，故解此常微分方程式，再取反拉氏變換，即可求得原方程式之解。

對於二維的問題，可經由兩次拉氏變換（例如，先對  $t$ ，再對  $x$ ）而得到常微分方程式，欲求得原方程式之解，也必須經過雙重反變換（Double inversion），此過程通常稱為多重拉氏變換（Iterated Laplace transformation）。類似的方法亦可應用於三維（或更高維次）的問題。邊界值問題亦可由傅氏變換及拉氏變換兩者共同解之。

## 習題與解答

## 熱傳導

- 8.1 - 一半無限大固體  $x > 0$ （見圖 8-5），最初溫度為零。在  $t = 0$  時，一恒溫物質（溫度為  $U_0 > 0$ ）置於平面  $x = 0$ ，求其後任意時間  $t > 0$  時，任意點之溫度為何？

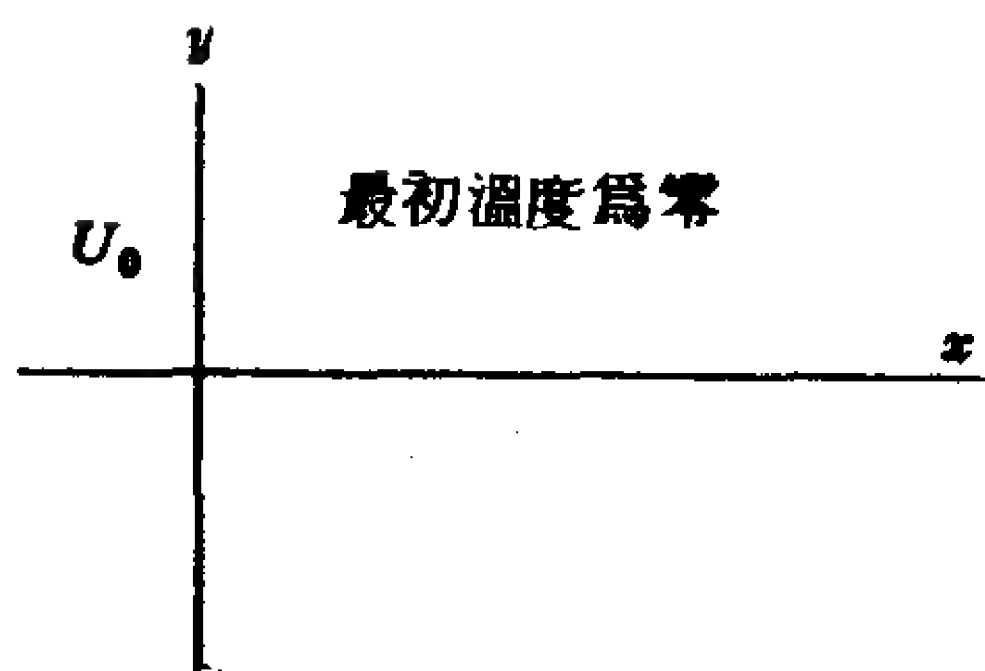


圖 8-5

圖 欲求得任意點  $x$  及任意時間  $t$  的溫度  $U(x, t)$ ，其對應之邊界值問題為

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad x > 0, t > 0$$

$$U(x, 0) = 0, \quad U(0, t) = U_0, \quad |U(x, t)| < M$$

最後一個條件表示，對所有的  $x$  及  $t$ ，溫度均為有界。

取拉氏變換，得

$$su - U(x, 0) = k \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{s}{k} u = 0 \quad (1)$$

$$\text{其中} \quad u(0, s) = \mathcal{L}\{U(0, t)\} = \frac{U_0}{s} \quad (2)$$

且  $u = u(x, s)$  必須為有界

解(1)式，得

$$u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/k} x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k} x}$$

取  $c_1 = 0$ ，以使得當  $x \rightarrow \infty$  時， $u$  為有界，故

$$u(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k} x} \quad (3)$$

由(2)式得  $c_2 = U_0 / s$ ，故

$$u(x, s) = \frac{U_0}{s} e^{-\sqrt{s/k} x}$$

由第7章第9題及第10題，可得

$$U(x, t) = U_0 \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt}) = U_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-u^2} du \right\}$$

8.2 若在  $t = 0$  時，加入恒溫物質之溫度為  $G(t)$ ， $t > 0$ ，試重做第一題。

圖 在此情況下的邊界值問題和上一題完全相同，只不過邊界條件  $U(0, t) = U_0$  須改為  $U(0, t) = G(t)$ 。若  $G(t)$  的拉氏變換為  $g(s)$ ，則由第1題(3)式可知  $c_1 = g(s)$ ，故

$$u(x, s) = g(s) e^{-\sqrt{s/k} x}$$

由第7章第11題，得

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s/k} x}\} = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} t^{-3/2} e^{-x^2/4kt}$$

故由褶積定理可得，

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} u^{-3/2} e^{-x^2/4ku} G(t-u) du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{kt}}^{\infty} e^{-v^2} G\left(t - \frac{x^2}{4kv^2}\right) dv \end{aligned}$$

其中用到代換式  $v^2 = x^2 / 4ku$ 。

8.3 一木棒之長度為  $l$ （見圖 8-6），其最初溫度為  $U_0$ 。 $t = 0$  時，在端點  $x = l$  加上一恒定溫度  $U_1$ ，而在另一端點  $x = 0$  則為絕熱（Insulated）。假設整支木棒的表面（除了  $x = l$ ）均絕熱，試求在其後任意時間  $t > 0$  時，任意點  $x$  的溫度。



圖 8-6

圖 邊界值問題爲

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$U(x, 0) = U_0, \quad U_x(0, t) = 0, \quad U(l, t) = U_1$$

取拉氏變換得，

$$su - U(x, 0) = k \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{su}{k} = -\frac{U_0}{k} \quad (1)$$

$$u_x(0, s) = 0, \quad u(l, s) = \frac{U_1}{s} \quad (2)$$

(1)式之一般解爲

$$u = c_1 \cosh \sqrt{s/k} x + c_2 \sinh \sqrt{s/k} x + \frac{U_0}{s}$$

由(2)式的第一條件式，可知  $c_2 = 0$ ，故

$$u = c_1 \cosh \sqrt{s/k} x + \frac{U_0}{s}$$

再由(2)的第二條件式可得

$$c_1 \cosh \sqrt{s/k} l + \frac{U_0}{s} = \frac{U_1}{s} \quad \text{即} \quad c_1 = \frac{U_1 - U_0}{s \cosh \sqrt{s/k} l}$$

故

$$u(x, s) = \frac{U_0}{s} + (U_1 - U_0) \frac{\cosh \sqrt{s/k} x}{s \cosh \sqrt{s/k} l}$$

等號右端第一項的反拉氏變換爲  $U_0$ ，而由複數反變換公式，可得第二項的反拉氏變換爲（暫不考慮常數  $U_1 - U_0$ ）：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \frac{\cosh \sqrt{s/k} x}{s \cosh \sqrt{s/k} l} ds$$

如同第 7 章第 13 題，上式即爲被積函數之所有極點的留數和，而極點（均爲單極點）爲

$$s = 0, \quad \sqrt{s/k} l = (n - \frac{1}{2})\pi i \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

即

$$s = 0, \quad s = -\frac{(2n-1)^2 \pi^2 k}{4l^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

在  $s = 0$  的留數爲  $\lim_{s \rightarrow 0} (s) \left( \frac{e^{st} \cosh \sqrt{s/k} x}{s \cosh \sqrt{s/k} l} \right) = 1$

在  $s = -\frac{(2n-1)^2\pi^2k}{4l^2} = s_n$  的留數為

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow s_n} (s - s_n) \left( \frac{e^{st} \cosh \sqrt{s/k} x}{s \cosh \sqrt{s/k} l} \right) \\ &= \left\{ \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{\cosh \sqrt{s/k} l} \right\} \left\{ \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{e^{st} \cosh \sqrt{s/k} x}{s} \right\} \\ &= \left\{ \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{1}{(\sinh \sqrt{s/k} l)(l/2\sqrt{ks})} \right\} \left\{ \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{e^{st} \cosh \sqrt{s/k} x}{s} \right\} \\ &= \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi} e^{-(2n-1)^2\pi^2kt/4l^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \end{aligned}$$

其中用到羅哈士比托規則。故

$$U(x, t) = U_1 + \frac{4(U_1 - U_0)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2kt/4l^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

### 振動之繩

8.4 一無限長之細繩（端點為  $x = 0$ ）最初靜止於  $x$  軸。端點  $x = 0$  受到外力作用，其週期性的橫向位移為  $A_0 \sin \omega t$ ， $t > 0$ 。試求在任意時間  $t$ ，繩上任意點的位移。

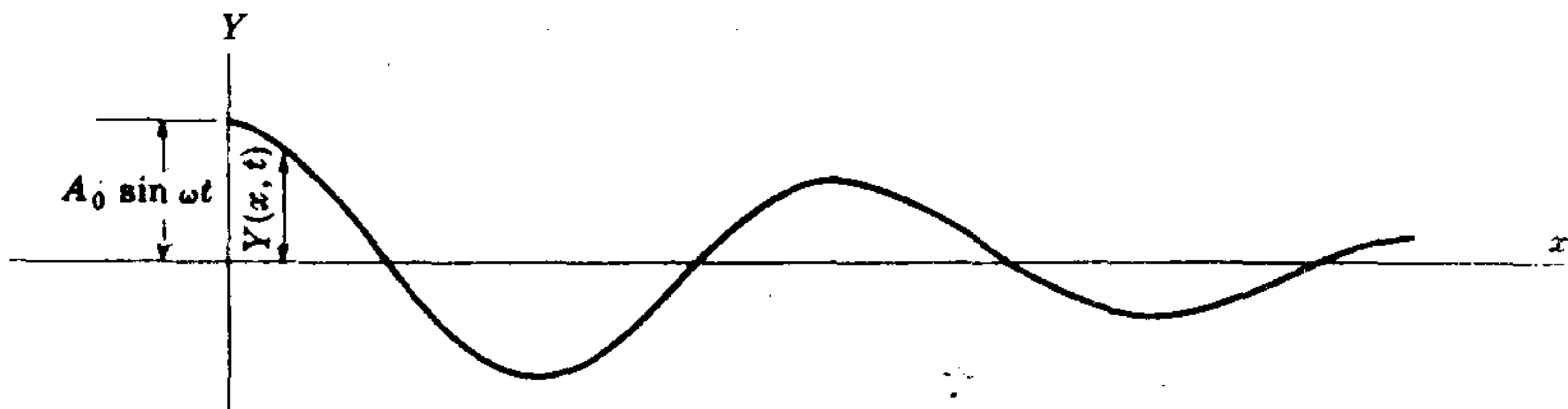


圖 8-7

圖 若  $Y(x, t)$  代表在任意點  $x$  及任意時間  $t$  的橫向位移，則邊界值問題為

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad x > 0, t > 0 \quad (1)$$

$$Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0, \quad Y(0, t) = A_0 \sin \omega t, \quad |Y(x, t)| < M \quad (2)$$

其中最後一個條件式說明此位移為有界。

取拉氏變換，並令  $y(x, s) = \mathcal{L}\{Y(x, t)\}$

$$s^2 y - s Y(x, 0) - Y_t(x, 0) = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2} y = 0 \quad (3)$$

$$y(0, s) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2}, \quad y(x, s) \text{ 有界} \quad (4)$$

此微分方程式之通解爲

$$y(x, s) = c_1 e^{sx/a} + c_2 e^{-sx/a}$$

因  $y(x, s)$  有界，取  $c_1 = 0$ ，故

$$y(x, s) = c_2 e^{-sx/a}$$

由(4)式中第一條件式得  $c_2 = A_0 \omega / (s^2 + \omega^2)$  故

$$y(x, s) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} e^{-sx/a}$$

$$Y(x, t) = \begin{cases} A_0 \sin \omega(t - x/a) & t > x/a \\ 0 & t < x/a \end{cases}$$

此式之物理意義爲，繩上之任一點  $x$ ，在  $t = x/a$  時才開始振動，且其運動方式和端點  $x = 0$  完全相同，只不過時間落後  $x/a$ 。常數  $a$  在此爲繩波前進之速度。

- 8.5 一拉緊之柔軟細繩固定於  $x = 0$  及  $x = l$ 。在時間  $t = 0$  時，此細繩之外形被固定爲  $F(x) = \mu x(l - x)$  ( $\mu$  爲一常數)，然後釋放。試求任意時間  $t > 0$  時，繩上任意點  $x$  的位移。

圖 邊界值問題爲

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(l, t) = 0, \quad Y(x, 0) = \mu x(l - x), \quad Y_t(x, 0) = 0$$

取拉氏變換，並令  $y(x, s) = \mathcal{L}\{Y(x, t)\}$ ，可得

$$s^2 y - s Y(x, 0) - Y_t(x, 0) = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2} y = -\frac{\mu s x(l - x)}{a^2} \quad (1)$$

$$y(0, s) = 0, \quad y(l, s) = 0 \quad (2)$$

(1)式的一般解爲

$$y = c_1 \cosh \frac{sx}{a} + c_2 \sinh \frac{sx}{a} + \frac{\mu x(l - x)}{s} - \frac{2a^2 \mu}{s^3} \quad (3)$$

再由(2)，可得

$$c_1 = \frac{2a^2 \mu}{s^3}, \quad c_2 = \frac{2a^2 \mu}{s^3} \left( \frac{1 - \cosh sl/a}{\sinh sl/a} \right) = -\frac{2a^2 \mu}{s^3} \tanh sl/2a \quad (4)$$

故(3)式變為  $y = \frac{2a^2\mu}{s^3} \frac{\cosh s(2x-l)/2a}{\cosh sl/2a} + \frac{\mu x(l-x)}{s} - \frac{2a^2\mu}{s^3}$

利用留數定理，可得（見第7章第17題）

$$Y(x, t) = a^2\mu \left\{ t^2 + \left( \frac{2x-l}{2a} \right)^2 - \left( \frac{l}{2a} \right)^2 \right\} - \frac{32a^2\mu}{\pi^3} \left( \frac{l}{2a} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi(2x-l)}{2l} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{l} + \mu x(l-x) - a^2\mu t^2$$

即  $Y(x, t) = \frac{8\mu l^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{l}$

### 橫樑的振動

8.6 一橫樑（長度  $l$ ，端點  $x=0$  為固定端，見圖8-8）最初靜止，一單位面積為  $F_0$  之固定外力縱向施於自由端，求任意時間  $t > 0$  時，任意點  $x$  的縱向位移。

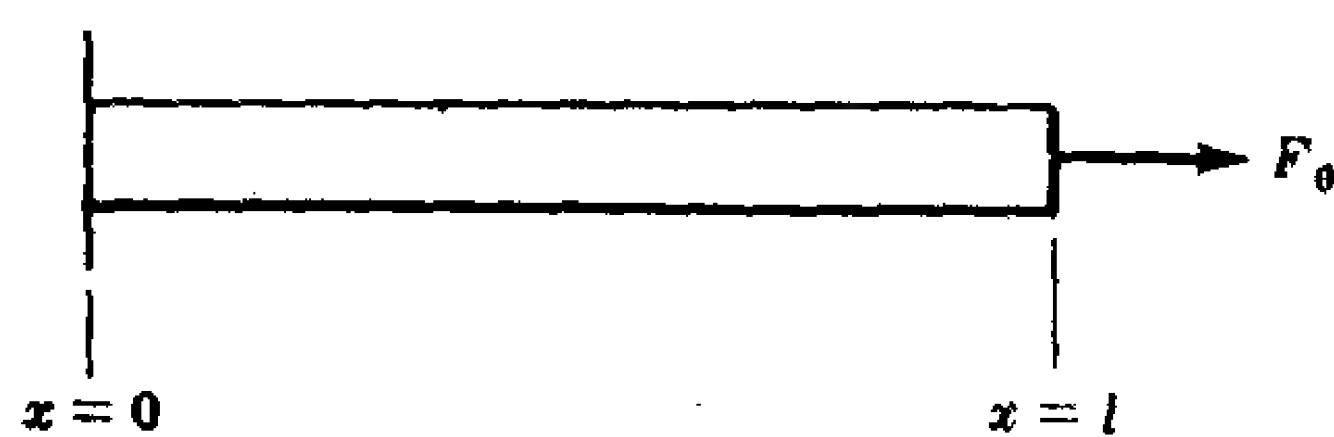


圖 8-8

若  $Y(x, t)$  代表任意時間  $t$ ，橫樑內任意點  $x$  的縱向位移，則邊界值問題為

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, t > 0$$

$$Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0, \quad Y(0, t) = 0, \quad Y_x(l, t) = F_0/E$$

其中  $E$  為楊氏係數。

取拉氏變換，並令  $y(x, s) = \mathcal{L}\{Y(x, t)\}$ ，得

$$s^2 y(x, s) - s Y(x, 0) - Y_t(x, 0) = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} y = 0$$

$$y(0, s) = 0, \quad y_x(l, s) = F_0/E s \quad (1)$$

解上述微分方程式，得

$$y(x, s) = c_1 \cosh(sx/c) + c_2 \sinh(sx/c)$$

由(1)式中第一條件式，得  $c_1 = 0$  故

$$y(x, s) = c_2 \sinh(sx/c)$$

$$y_x(x, s) = c_2 (s/c) \cosh(sx/c)$$

由(2)式中第二條件式，得

$$c_2 (s/c) \cosh (sl/c) = F_0/E s \quad \text{即} \quad c_2 = \frac{cF_0}{Es^2 \cosh (sl/c)}$$

$$y(x, s) = \frac{cF_0}{E} \cdot \frac{\sinh (sx/c)}{s^2 \cosh (sl/c)} \quad (2)$$

再由第7章第14題，可得

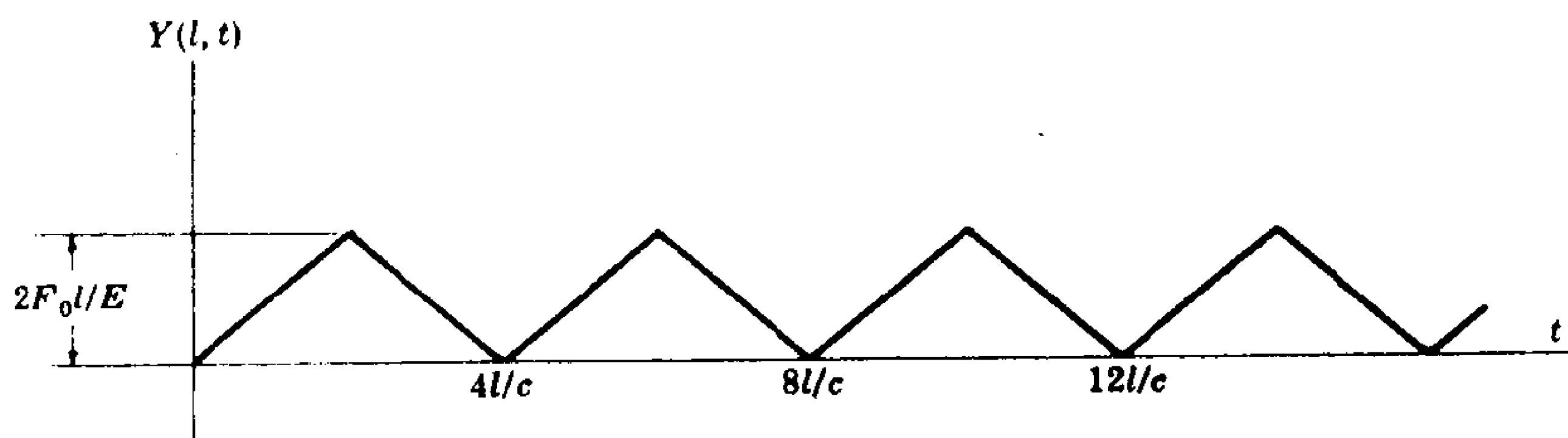
$$Y(x, t) = \frac{F_0}{E} \left[ x + \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n-1)\pi ct}{2l} \right] \quad (3)$$

8.7 在上題中，試求自由端  $x = l$  的位移（為  $t$  的函數）。

圖 令  $x = l$  代入第6題(2)式，得

$$y(l, s) = \frac{cF_0}{E} \frac{\sinh (sl/c)}{s^2 \cosh (sl/c)}$$

由第1章第92題或附錄B 134條，可知此為三角波（圖8-9）的拉氏變換，故在端點  $x = l$  的位移（為  $t$  的函數）即為圖8-9。



■ 8-9

8.8 一半無限長之橫樑最初靜止於  $x$  軸上。在  $t = 0$  時，使其端點  $x = 0$  之橫向位移為  $h$ ，試求在任意時間  $t > 0$  時，任意時點  $x$  之橫位移  $Y(x, t)$ 。

答 對應之邊界值問題為

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \quad x > 0, t > 0 \quad (1)$$

$$Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0, \quad Y(0, t) = h, \quad Y_{xx}(0, t) = 0, \quad |Y(x, t)| < M \quad (2)$$

取拉氏變換，得

$$s^2 y(x, s) - s Y(x, 0) - Y_t(x, 0) + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad \text{即} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{s^2}{b^2} y = 0$$

$$y(0, s) = h/s, \quad y_{xx}(0, s) = 0, \quad y(x, s) \text{ 爲有界} \quad (3)$$

此微分方程式之解為

$$y(x, s) = e^{\sqrt{s/2b}x} (c_1 \cos \sqrt{s/2b}x + c_2 \sin \sqrt{s/2b}x) + e^{-\sqrt{s/2b}x} (c_3 \cos \sqrt{s/2b}x + c_4 \sin \sqrt{s/2b}x)$$

因  $y(x, s)$  為有界，取  $c_1 = c_2 = 0$  故

$$y(x, s) = e^{-\sqrt{s/2b}x} (c_3 \cos \sqrt{s/2b}x + c_4 \sin \sqrt{s/2b}x)$$

由(3)式的第一及第二邊界條件，可求得  $c_4 = 0$  及  $c_3 = h/s$  故

$$y(x, s) = \frac{h}{s} e^{-\sqrt{s/2b}x} \cos \sqrt{s/2b}x$$

由複數反變換公式，可得上式之反拉氏變換為

$$Y(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{h e^{st - \sqrt{s/2b}x} \cos \sqrt{s/2b}x}{s} ds$$

因  $s = 0$  為分枝點，故我們用圖 8-10 的積分路徑來求上式積分值。利用類似第 7 章第 9 題的做法，得（為簡潔起見，暫時省略被積函數）

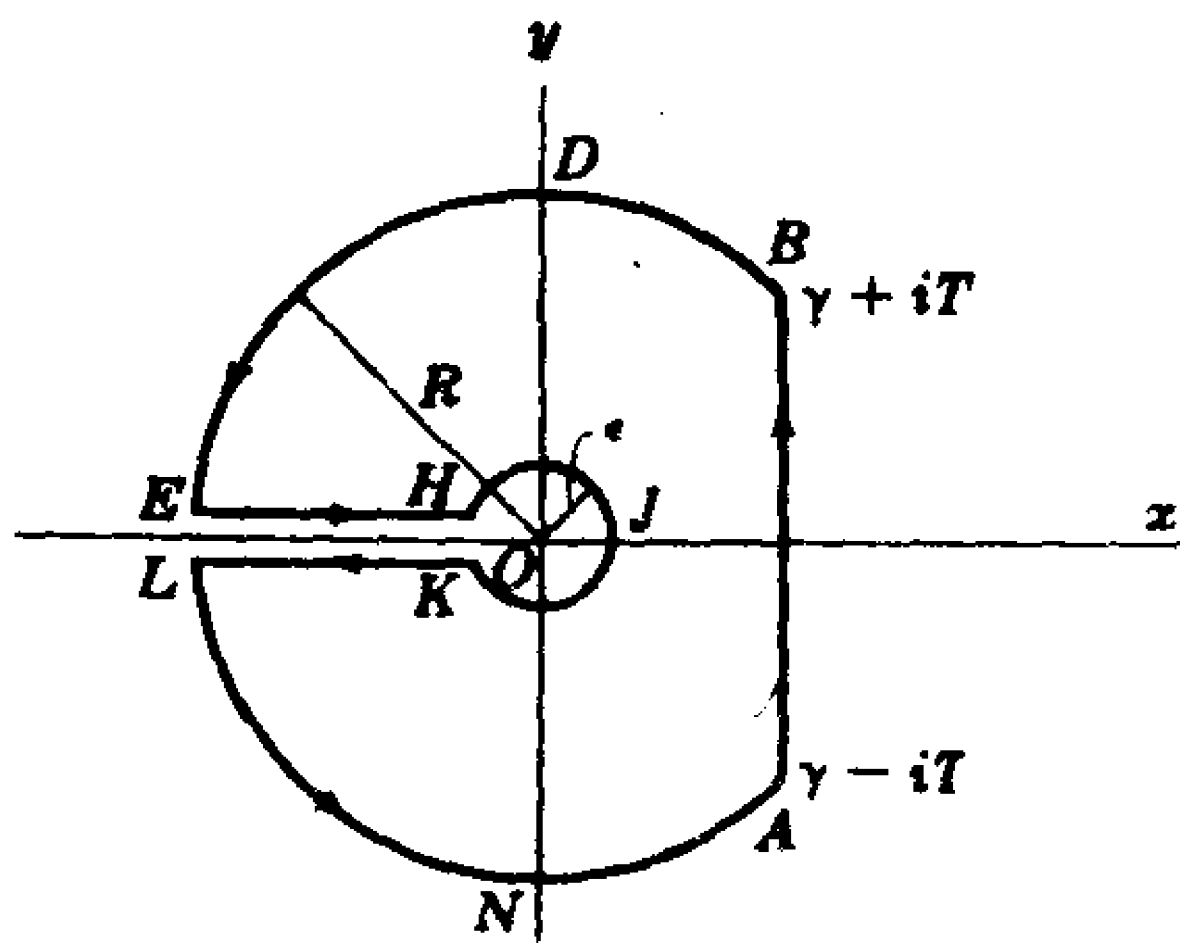


圖 8-10

$$Y(x, t) = - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{EH} + \int_{HJK} + \int_{KL} \right\} \quad (4)$$

沿  $EH$  時， $s = u e^{\pi i}$ ， $\sqrt{s} = i \sqrt{u}$  即

$$\int_{EH} = \int_R^\epsilon \frac{h e^{-ut - i\sqrt{u/2b}x} \cosh \sqrt{u/2b}x}{u} du$$

沿  $KL$  時， $s = u e^{-\pi i}$ ， $\sqrt{s} = -i \sqrt{u}$  即

$$\int_{KL} = \int_\epsilon^R \frac{h e^{-ut + i\sqrt{u/2b}x} \cosh \sqrt{u/2b}x}{u} du$$

沿  $HJK$  時， $s = \epsilon e^{i\theta}$  即

$$\int_{HJK} = \int_{-\pi}^{\pi} h e^{\epsilon e^{i\theta}t - \sqrt{\epsilon e^{i\theta}/2b}x} \cos \sqrt{\epsilon e^{i\theta}/2b}x d\theta$$

故(4)式變為

$$Y(x, t) = h \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-ut} \sin \sqrt{u/2b}x \cosh \sqrt{u/2b}x}{u} du \right\}$$



令  $u/2b = v^2$ ，上式可寫成

$$Y(x, t) = h \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-2bv^2t} \sin vx \cosh vx}{v} dv \right\}$$

上式可用福來乃耳積分 (Fresnel integrals) 寫成 (見 66 題及附錄 B 第 10 及 11 條)

$$Y(x, t) = h \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{bt}} (\cos w^2 + \sin w^2) dw \right\}$$

### 傳輸線

8.9 有一半無限長之傳輸線，假設其單位長度上的電感及電導均可省略，且在發送端  $x = 0$  加上一電壓如下

$$E(0, t) = \begin{cases} E_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

試求任意時間  $t > 0$  時，任意點  $x > 0$  之電壓  $E(x, t)$  及電流  $I(x, t)$ 。

圖 令  $L = 0$  及  $G = 0$  代入傳輸線方程式。得

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -RI, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1)$$

邊界條件為

$$E(x, 0) = 0, \quad I(x, 0) = 0, \quad E(0, t) = \begin{cases} E_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}, \quad |E(x, t)| < M$$

取拉氏變換，並令  $\mathcal{L}\{E(x, t)\} = \tilde{E}(x, s)$ ,  $\mathcal{L}\{I(x, t)\} = \tilde{I}(x, s)$ ，得

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{E}}{dx} &= -R\tilde{I}, & \frac{d\tilde{I}}{dx} &= -C\{s\tilde{E} - E(x, 0)\} \\ \frac{d\tilde{E}}{dx} &= -R\tilde{I}, & \frac{d\tilde{I}}{dx} &= -Cs\tilde{E} \end{aligned} \quad (2)$$

將(2)式中第一式對  $x$  微分，並將第二式代入，可消去  $I$  而得。

$$\frac{d^2\tilde{E}}{dx^2} = -R \frac{d\tilde{I}}{dx} = RCs\tilde{E} \quad \text{即} \quad \frac{d^2\tilde{E}}{dx^2} - RCs\tilde{E} = 0 \quad (3)$$

(3)式之一般解為

$$\tilde{E}(x, s) = c_1 e^{\sqrt{RCs}x} + c_2 e^{-\sqrt{RCs}x}$$

因  $E(x, s)$  為有界，取  $c_1 = 0$ ，故

$$\tilde{E}(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{RC}s x}, \quad (4)$$

令  $E(0, t) = G(t)$  且  $\mathcal{L}\{E(0, t)\} = \tilde{E}(0, s) = g(s)$ , 故由(4)式可得  $c_2 = g(s)$   
即

$$\tilde{E}(x, s) = g(s) e^{-\sqrt{RC}s x} \quad (5)$$

如同第2題, 由褶積定理得

$$E(x, t) = \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u} G(t-u) du$$

但因

$$G(t-u) = \begin{cases} E_0 & 0 < t-u < T \text{ 或 } t-T = u < t \\ 0 & t-u > T \quad u < t-T \end{cases}$$

故當  $t > T$  時,

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \int_{t-T}^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u} E_0 du \\ &= \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t-T}} e^{-v^2} dv \quad (\text{letting } RCx^2/4u = v^2) \\ &= E_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t-T}} e^{-v^2} dv - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv \right\} \\ &= E_0 \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t-T}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$0 < t < T$  時,

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u} E_0 du = \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv \\ &= E_0 \{1 - \operatorname{erf}(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t})\} \\ &= E_0 \operatorname{erfc}(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}) \end{aligned}$$

由  $I = -\frac{1}{R} \frac{\partial E}{\partial x}$ , 故將  $E$  對  $x$  微分, 並乘上  $-1/R$  即可得

$$I(x, t) = \begin{cases} \frac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C}{R}} t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t} & 0 < t < T \\ \frac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C}{R}} \left[ t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t} - (t-T)^{-3/2} e^{-RCx^2/4(t-T)} \right] & t > T \end{cases}$$

其他各類問題

## 8.10 (a) 解下列邊界值問題

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad x > 0, t > 0$$

$$U(x, 0) = U_0, \quad U_x(0, t) = -\alpha U(0, t), \quad |U(x, t)| < M$$

(b) 試以熱流觀點，解釋上述問題。

圖 此問題乃由下列現象產生：考慮一半無限大之導熱物質，其最初之溫度為  $U_0$ ，並將熱流傳導至  $x < 0$  之介質，而介質之溫度為零。假設熱流傳導的速度正比於平面  $x = 0$  及介質  $x < 0$  之溫度差，即

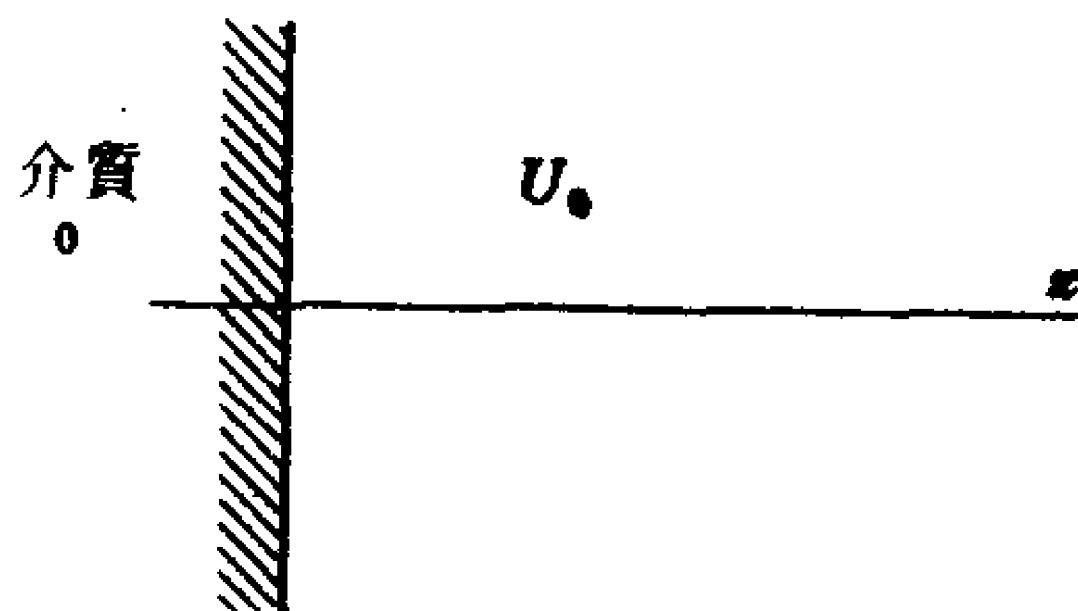


圖 8-11

$$U_x(0, t) = -\alpha[U(0, t) - 0] = -\alpha U(0, t)$$

欲求上式之解，取拉氏變換得

$$su - U_0 = k \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{su}{k} = -\frac{U_0}{k} \quad (1)$$

$$u_x(0, s) = -\alpha u(0, s), \quad u(x, s) \text{ 爲有界} \quad (2)$$

上述微分方程式之通解爲

$$u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/k}x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{U_0}{s}$$

因  $u(x, s)$  爲有界，取  $c_1 = 0$ ，故

$$u(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{U_0}{s}$$

由(2)中第一條件式，得  $c_2 = \frac{\alpha U_0}{s(\sqrt{s} - \alpha)}$  故

$$u(x, s) = \frac{\alpha U_0}{s(\sqrt{s} - \alpha)} e^{-\sqrt{s/k}x} + \frac{U_0}{s}$$

再由複數反變換公式，得

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U_0 + \alpha U_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{s/k}x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)} \right\} \\ &= U_0 + \frac{\alpha U_0}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st - \sqrt{s/k}x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)} ds \end{aligned}$$

如同問題 8，可得（暫時省略被積函數不寫），

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st} - \sqrt{s/k} x}{s(\sqrt{s} - \alpha)} ds = - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{EH} + \int_{HJK} + \int_{KL} \right\} \quad (3)$$

沿  $EH$  時,  $s = ue^{\pi i}$ ,  $\sqrt{s} = i\sqrt{u}$  即

$$\int_{EH} = \int_R^\epsilon \frac{e^{-ut} - i\sqrt{u/k} x}{u(i\sqrt{u} - \alpha)} du$$

沿  $KL$  時,  $s = ue^{-\pi i}$ ,  $\sqrt{s} = -i\sqrt{u}$  即

$$\int_{KL} = \int_\epsilon^R \frac{e^{-ut} + i\sqrt{u/k} x}{u(-i\sqrt{u} - \alpha)} du$$

沿  $HJK$  時,  $s = \epsilon e^{i\theta}$  即

$$\int_{HJK} = \int_\pi^{-\pi} \frac{e^{\epsilon e^{i\theta} t} - \sqrt{\epsilon e^{i\theta}/k} x}{\sqrt{\epsilon} e^{i\theta/2} - \alpha} i d\theta$$

將上面各式代入(3), 得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st} - \sqrt{s/k} x}{s(\sqrt{s} - \alpha)} ds = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{u} \left[ \frac{\sqrt{u} \cos x\sqrt{u} - \alpha \sin x\sqrt{u}}{u + \alpha^2} \right] du$$

$$\begin{aligned} \text{故 } U(x, t) &= \frac{\alpha U_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{u} \left[ \frac{\sqrt{u} \cos x\sqrt{u} - \alpha \sin x\sqrt{u}}{u + \alpha^2} \right] du \\ &= \frac{2\alpha U_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-v^2 t}}{v} \left[ \frac{v \cos xv - \alpha \sin xv}{v^2 + \alpha^2} \right] dv \end{aligned}$$

其中用到代換式  $u = v^2$ 。

- 8.11 一拉緊之柔軟細繩, 固定於  $x$  軸上之  $x = 0$  及  $x = 1$ 。在時間  $t = 0$  時, 細繩之形狀為  $F(x)$ ,  $0 < x < 1$ , 並將之釋放。求其後任意時間  $t > 0$  時, 繩上之任意點  $x$  之位移。

圖 對應之邊界值問題為

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (1)$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(1, t) = 0, \quad Y(x, 0) = F(x), \quad Y_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

為解題方便, 先不考慮(1)式, 而以下式代之

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

等解得上式之  $Y(x, t)$  後, 再以  $\alpha t$  替代  $t$ , 即可得(1)式之解 (參見 49 題)

取拉氏變換，得

$$s^2 y - s Y(x, 0) - Y_t(x, 0) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - s^2 y = -s F(x) \quad (3)$$

$$y(0, s) = 0, \quad y(1, s) = 0 \quad (4)$$

(3)式之通解爲(見第3章第8題)

$$y(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \sinh sx - \int_0^x F(u) \sinh s(x-u) du$$

由(4)式之第一條件式，可得  $c_1 = 0$ ，故

$$y(x, s) = c_2 \sinh sx - \int_0^x F(u) \sinh s(x-u) du \quad (5)$$

再由(4)之第二條件式，得

$$0 = c_2 \sinh s - \int_0^1 F(u) \sinh s(1-u) du$$

$$c_2 = \int_0^1 F(u) \frac{\sinh s(1-u)}{\sinh s} du$$

故(5)式變爲

$$y(x, s) = \int_0^1 F(u) \frac{\sinh s(1-u) \sinh sx}{\sinh s} du - \int_0^x F(u) \sinh s(x-u) du$$

上式之第一積分式可寫成兩個積分式之和，一從0積分至  $x$ ，另一從  $x$  積分至1，故

$$\begin{aligned} y(x, s) &= \int_0^x F(u) \left\{ \frac{\sinh s(1-u) \sinh sx}{\sinh s} - \sinh s(x-u) \right\} du + \int_x^1 F(u) \frac{\sinh s(1-u) \sinh sx}{\sinh s} du \\ &= \int_0^x F(u) \frac{\sinh s(1-x) \sinh su}{\sinh s} du + \int_x^1 F(u) \frac{\sinh s(1-u) \sinh sx}{\sinh s} du \end{aligned}$$

我們現在求反拉氏變換。由複數反變換公式，上式右端第一項可變換爲

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \left\{ \int_0^x F(u) \frac{\sinh s(1-x) \sinh su}{\sinh s} du \right\} ds$$

因上式等於在單極點  $s = n\pi i$  的留數和，故上式即爲

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n\pi it} \int_0^x F(u) \frac{\sin n\pi(1-x) \sin n\pi u}{-\cos n\pi} du = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^x F(u) \sin n\pi u du \right\} \sin n\pi x \cos n\pi t$$

同理，第二項之反變換爲

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_x^1 F(u) \sin n\pi u du \right\} \sin n\pi x \cos n\pi t$$

第一項和第二項相加，得

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 F(u) \sin n\pi u \, du \right\} \sin n\pi x \cos n\pi t$$

以  $at$  取代  $t$ ，得

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 F(u) \sin n\pi u \, du \right\} \sin n\pi x \cos n\pi at$$

- 8.12 一無限長之圓柱體，半徑為  $r$ ，最初之溫度為  $T$ 。在  $t = 0$  時，在其表面保持溫度為  $0^\circ\text{C}$ ，求其後任意時間  $t$  時，圓柱體內任意點之溫度。

圖 若以圓柱座標  $(r, \phi, z)$  代表圓柱體內任一點之位置，且此圓柱體之中心軸和  $z$  軸重合（見圖 8-12），則可看出溫度值和  $\phi$  及  $z$  均無關，故可以  $U(r, t)$  表示。對應之邊界值問題為

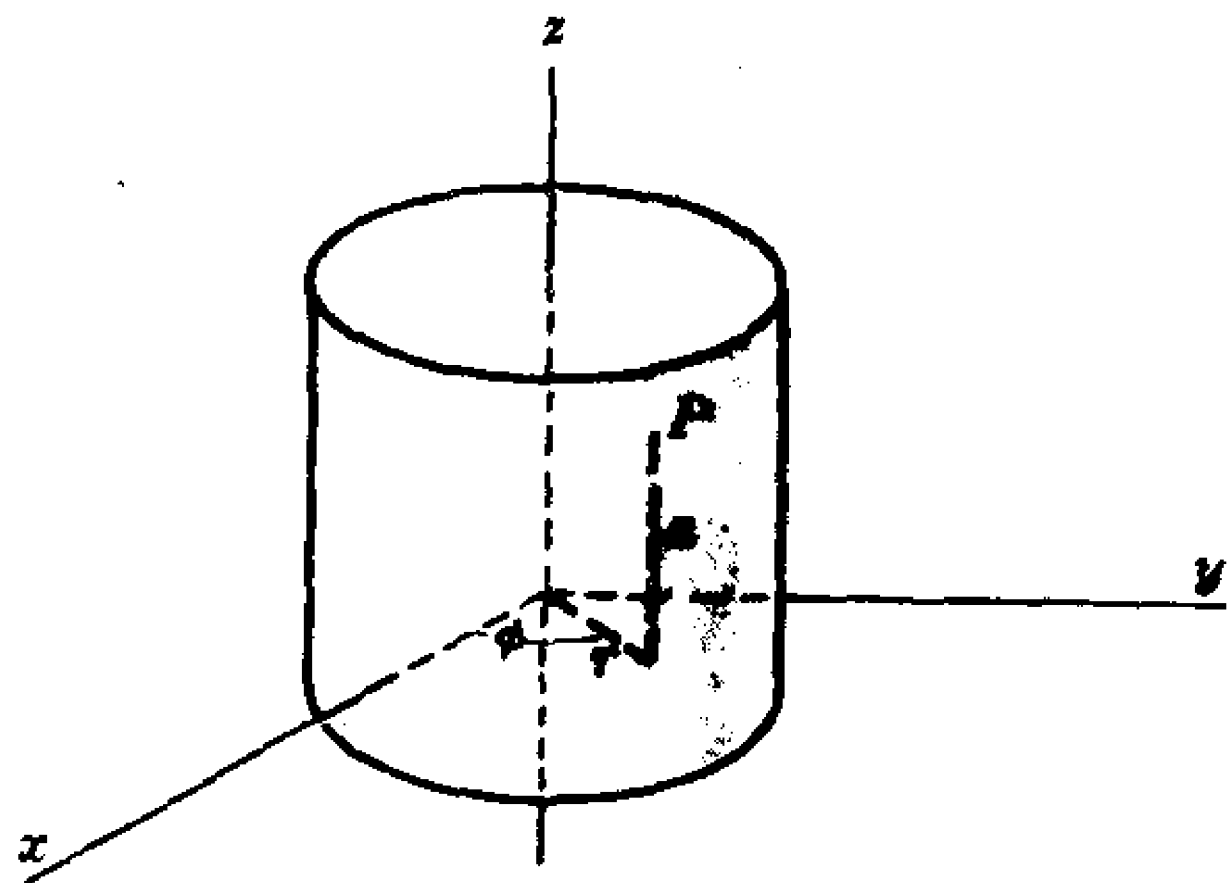


圖 8-12

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad 0 < r < 1 \quad (1)$$

$$U(1, t) = 0, \quad U(r, 0) = T, \quad |U(r, t)| < M \quad (2)$$

為解題方便，先不考慮(1)式，以下式代之

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

最後在解答中再以  $kt$  代  $t$  即可。

取拉氏變換，得

$$su - U(r, 0) = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \quad \text{即} \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - su = -T$$

$$u(1, s) = 0, \quad u(r, s) \text{ 為有界}$$

上式之一般解可用貝色函數表為

$$u(r, s) = c_1 J_0(i\sqrt{s}r) + c_2 Y_0(i\sqrt{s}r) + \frac{T}{s}$$

當  $r \rightarrow 0$  時， $Y_0(i\sqrt{s}r)$  為有界，故取  $c_2 = 0$ 。

$$u(r, s) = c_1 J_0(i\sqrt{s}r) + \frac{T}{s}$$

再由  $u(1, s) = 0$ ，得

$$c_1 J_0(i\sqrt{s}) + \frac{T}{s} = 0 \quad \text{即} \quad c_1 = -\frac{T}{s J_0(i\sqrt{s})}$$

$$\text{故} \quad u(r, s) = \frac{T}{s} - \frac{T J_0(i\sqrt{s} r)}{s J_0(i\sqrt{s})}$$

由反變換公式可得

$$U(r, t) = T - \frac{T}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st} J_0(i\sqrt{s} r)}{s J_0(i\sqrt{s})} ds$$

因  $J_0(i\sqrt{s})$  之單極點出現在  $i\sqrt{s} = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ ，故上式被積函數之單極點為  $s = -\lambda_n^2$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$  及  $s = 0$ 。又上式被積函數滿足第 7 章第 2 題中的條件，故可使用留數定理理解之。

在  $s = 0$  時，被積函數的留數為

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{e^{st} J_0(i\sqrt{s} r)}{s J_0(i\sqrt{s})} = 1$$

在  $s = -\lambda_n^2$  時，被積函數的留數為

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\lambda_n^2} (s + \lambda_n^2) \frac{e^{st} J_0(i\sqrt{s} r)}{s J_0(i\sqrt{s})} &= \left\{ \lim_{s \rightarrow -\lambda_n^2} \frac{s + \lambda_n^2}{J_0(i\sqrt{s})} \right\} \left\{ \lim_{s \rightarrow -\lambda_n^2} \frac{e^{st} J_0(i\sqrt{s} r)}{s} \right\} \\ &= \left\{ \lim_{s \rightarrow -\lambda_n^2} \frac{1}{J_0'(i\sqrt{s}) i/2\sqrt{s}} \right\} \left\{ \frac{e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{-\lambda_n^2} \right\} \\ &= -\frac{2e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \end{aligned}$$

其中我們在計算極限時，用到羅哈士比托規則，及等式  $J_0'(u) = -J_1(u)$ 。故

$$\begin{aligned} U(r, t) &= T - T \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \right\} \\ &= 2T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \end{aligned}$$

以  $kt$  取代  $t$ ，得所求之解為

$$U(r, t) = 2T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-k\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

- 8.13 一半無限大之絕熱棒和  $x$  軸重合 ( $x > 0$ )，且其最初之溫度為零。在  $t = 0$  時，一熱量瞬時產生於  $x = a$  ( $a > 0$ ) 處，求任意時間  $t > 0$  時，棒中任意點  $x$  之溫度為何？

圖 此棒之熱傳導方程式為

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad x > 0, t > 0 \quad (1)$$

因一熱量瞬時產生於  $x = a$  處，故可以下列之邊界條件表示

$$U(a, t) = Q \delta(t) \quad (2)$$

其中  $Q$  為常數， $\delta(t)$  為脈衝函數。又因最初溫度為零，且溫度值必為有界，故

$$U(x, 0) = 0, \quad |U(x, t)| < M \quad (3)$$

取(1)及(2)式之拉氏變換，並利用(3)之第一條件式，可得

$$su - U(x, 0) = k \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{su}{k} = 0 \quad (4)$$

$$u(a, s) = Q \quad (5)$$

由(4)式，可得

$$u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/k}x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k}x}$$

由  $u(x, s)$  為有界，取  $c_1 = 0$ ，故

$$u(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}x} \quad (6)$$

再由(5)式

$$u(a, s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}a} = Q \quad \text{即} \quad c_2 = Q e^{\sqrt{s/k}a}$$

故

$$u(x, s) = Q e^{-(x-a)\sqrt{s/k}} \quad (7)$$

利用第 7 章第 11 題，得上式之拉氏反變換（即為所求之溫度）為

$$U(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-(x-a)^2/4kt} \quad (8)$$

點  $x=a$  有時稱為強度  $Q$  的熱源（A heat source of strength  $Q$ ）。

- 8.14 一半無限大之平板，寬度為  $\pi$ （見圖 8-13），且其表面均絕熱。半無限大邊緣之溫度保持在  $0^\circ\text{C}$ ，而有限大邊緣之溫度保持在  $100^\circ\text{C}$ ，並假設最初之溫度為  $0^\circ\text{C}$ ，求任意時間任意點之溫度。

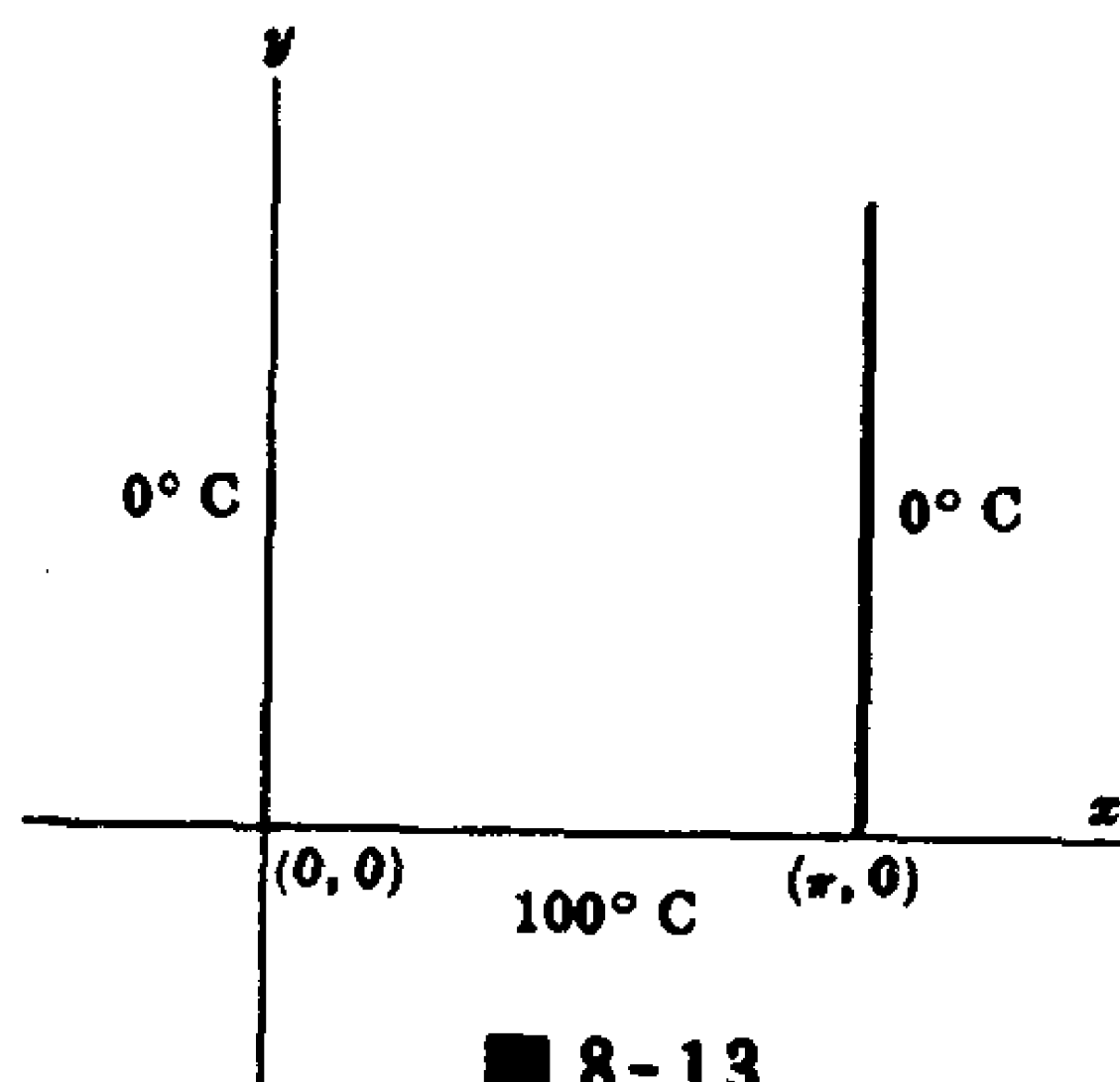
圖 假設擴散係數為 1，則和溫度  $U(x, y, t)$  相關的邊界值問題為

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$U(0, y, t) = 0 \quad (2)$$

$$U(\pi, y, t) = 0 \quad (3)$$

$$U(x, y, 0) = 0 \quad (4)$$





$$U(x, 0, t) = 100 \quad (5)$$

$$|U(x, y, t)| < M \quad (6)$$

其中  $0 < x < \pi$ ,  $y > 0$ ,  $t > 0$

取(1)式之拉氏變換，並利用(4)式，可得（其中  $u = u(x, y, s) = \mathcal{L}\{U(x, y, t)\}$ 。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = su \quad (7)$$

將(7)式乘上  $\sin nx$ ，並從 0 到  $\pi$  積分之（即取(7)式之正弦變換），得

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin nx \, dx + \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin nx \, dx = \int_0^\pi su \sin nx \, dx$$

令  $\tilde{u} = \int_0^\pi u \sin nx \, dx$ ，代入上式，得

$$-n^2 \tilde{u} + n u(\pi, y, s) \cos n\pi + n u(0, y, s) + \frac{d^2 \tilde{u}}{dy^2} = s \tilde{u} \quad (8)$$

因(1)，(3)式之拉氏變換為

$$u(0, y, s) = 0, \quad u(\pi, y, s) = 0$$

故(8)式變為

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dy^2} - (n^2 + s) \tilde{u} = 0$$

上式之解為

$$\tilde{u} = A e^{\nu \sqrt{n^2 + s}} + B e^{-\nu \sqrt{n^2 + s}}$$

當  $y \rightarrow \infty$  時， $u$  為有界，故取  $A = 0$ ，即

$$\tilde{u} = B e^{-\nu \sqrt{n^2 + s}} \quad (9)$$

再由(5)式得

$$\tilde{u}(n, 0, s) = \int_0^\pi \frac{100}{s} \sin nx \, dx = \frac{100}{s} \left( \frac{1 - \cos n\pi}{n} \right)$$

故令  $y = 0$  代入(9)式，得

$$B = \frac{100}{s} \left( \frac{1 - \cos n\pi}{n} \right)$$

$$\tilde{u} = \frac{100}{s} \left( \frac{1 - \cos n\pi}{n} \right) e^{-\nu \sqrt{n^2 + s}}$$

由傅立葉正弦反變換公式得

$$u = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{s} \left( \frac{1 - \cos n\pi}{n} \right) e^{-\nu \sqrt{n^2 + s}} \sin nx \quad (10)$$

我們現在必須求得上式之反拉氏變換。因已知

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-y\sqrt{s}}\} &= \frac{y}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-y^2/4t} \\ \mathcal{L}^{-1}\{e^{-y\sqrt{s+n^2}}\} &= \frac{y}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-y^2/4t} e^{-n^2 t} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-y\sqrt{s+n^2}}}{s}\right\} &= \int_0^t \frac{y}{2\sqrt{\pi v^3}} e^{-y^2/4v} e^{-n^2 v} dv \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(p^2 + n^2 y^2/4p^2)} dp\end{aligned}$$

其中用到代換式  $y^2/4v = p^2$ 。

故在(10)式中利用上式逐項變換之，可得

$$U(x, y, t) = \frac{400}{\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos n\pi}{n} \right) \sin nx \int_{y/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(p^2 + n^2 y^2/4p^2)} dp$$

## 補充題

### 熱傳導

8.15 一半無限大之物質  $x > 0$ ，最初之溫度為零。一固定熱流  $A$ ，施於平面  $x = 0$ ，使得

$$-KU_x(0, t) = A。證明在時間  $t$  之後，平面  $x = 0$  之溫度為  $\frac{A}{K} \sqrt{\frac{kt}{\pi}}$$$

8.16 求15題中，任意點  $x$  的溫度。

$$\text{答} \quad \frac{A}{K} \left\{ \sqrt{kt/\pi} e^{-x^2/4kt} - \frac{1}{2} x \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt}) \right\}$$

8.17 一物質  $0 \leq x \leq l$  在端點  $x = 0$  及  $x = l$  均絕熱。若最初之溫度為  $ax(l-x)$ ，其中  $a$  為常數。求任意時間  $t$  時，任意點  $x$  之溫度。

$$\text{答} \quad \frac{al^2}{6} - \frac{al^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-4kn^2\pi^2 t/l^2}}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{l}$$

8.18 (a) 利用拉氏變換，解下列邊界值問題

$$\frac{\partial U}{\partial t} = .25 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 1 \quad 0 < x < 10, \quad t > 0$$

$$U(10, t) = 20, \quad U_x(0, t) = 0, \quad U(x, 0) = 50$$

(b) 以熱流觀點解釋此問題。

$$\text{圖 (a)} \quad U(x, t) = 220 - 2x^2 + \frac{6400}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 1600} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{20} \\ - \frac{120}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 1600} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{20}$$

8.19 (a) 解

$$2 \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad x > 0, t > 0$$

$$U_x(0, t) = 0, \quad U(x, 0) = e^{-x}, \quad U(x, t) \text{ 爲有界}$$

(b) 以熱流觀點解釋此題。

$$\text{圖} \quad U(x, t) = e^{t-x} - \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2 - x^2/4v^2} dv$$

8.20 (a) 一半無限大之物質  $x > 0$ ，在平面  $x = 0$  之溫度保持在  $U_0 \cos \omega t$ ， $t > 0$ 。若最初之溫度均爲零，證明在任意時間  $t > 0$  時，任意點  $x$  之溫度爲

$$U(x, t) = U_0 e^{-\sqrt{\omega/2k} x} \cos(\omega t - \sqrt{\omega/2k} x) - \frac{U_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ue^{-ut} \sin x \sqrt{u/k}}{u^2 + \omega^2} du$$

(b) 證明在  $t$  很大時，(a)中之積分值可忽略。

8.21 一半無限大之物質  $x \geq 0$  最初之溫度爲零。在  $t = 0$  時，平面  $x = 0$  之溫度突然提昇至固定溫度  $T_0$ ，並持續了一段時間  $t_0$ ，然後溫度再立刻降爲零。證明過了另一段時間  $t_0$  之後，溫度之最大值發生於  $x = 2\sqrt{kt_0 \ln 2}$  處，其中  $k$  爲擴散係數（假設爲常數）。

8.22 在  $t = 0$  時，一半無限大之物質  $x > 0$  的溫度爲零，但有一正弦熱流施於平面  $x = 0$ ，以致於  $-KU_x(0, t) = A + B \sin \omega t$ ， $t > 0$ 。證明其後任意時間  $t$  時，平面  $x = 0$  之溫度爲

$$\frac{2\sqrt{k}A}{K\sqrt{\pi}} t^{1/2} + \frac{2B\sqrt{k}\omega}{K} \left\{ \left( \int_0^{\sqrt{t}} \cos \omega v^2 dv \right) \sin \omega t - \left( \int_0^{\sqrt{t}} \sin \omega v^2 dv \right) \cos \omega t \right\}$$

8.23 試求在 22 題中，任意點  $x > 0$  之溫度爲何？

## 振動之繩

8.24 (a) 解下列邊界值問題

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$Y_x(0, t) = 0, \quad Y(\pi, t) = h, \quad Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0$$

1039304-8 B16

(b) (a)之物理意義為何？

$$\text{答 } Y(x, t) = \frac{8h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin(n - \frac{1}{2})x \sin(2n-1)t$$

8.25 解下列邊界值問題

$$Y_{tt} = Y_{xx} + g \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(\pi, t) = 0, \quad Y(x, 0) = \mu x(\pi - x), \quad Y_t(x, 0) = 0$$

並解釋其物理意義。

$$\text{答 } Y(x, t) = \frac{1}{2}gx(\pi - x) + \frac{4(2\mu x - g)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)x \cos(2n-1)t$$

8.26 一拉緊之柔軟細繩固定於兩端點  $x = 0$  及  $x = l$ 。在  $t = 0$  時，其中點之位移為  $h$ ，並由此釋放之，求任意時間  $t > 0$  之位移。

$$\text{答 } Y(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{l}$$

8.27 (a) 解

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad x > 0, t > 0$$

$$Y_x(0, t) = A \sin \omega t, \quad Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0$$

(b) 本題之物理意義為何？

$$\text{答 (a) } Y(x, t) = \frac{Aa}{\omega} \{ \cos \omega(t - x/a) - 1 \} \quad \text{若 } t > x/a$$

$$0 \quad \text{若 } t \leq x/a$$

### 橫樑之振動

8.28 一橫樑長為  $l$ ，在端點  $x = 0$  為固定端，而在  $x = l$  則為自由端。假設在端點  $x = l$  突然施以一外力，使其縱向位移為  $\alpha$ ，並由此釋放之，證明在任意時間  $t$  時，任意點  $x$  之位移為

$$Y(x, t) = \frac{\alpha x}{l} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l}$$

8.29 一橫樑在其端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為鉸支承。在  $t = 0$  時，此橫樑受到一衝擊，使得其橫向速度為  $V_0 \sin \pi x / l$ 。求其後任意時間任意點之橫向位移。

8.30 若橫向速度改為  $V_0 x(l - x)$ ，重做 29 題。

8.31 一橫樑長為  $l$ ，其兩端均為鉸支承。證明其橫向振盪之自由頻率為

$$f_n = \frac{n^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EIg}{\rho}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- 8.32 一半無限長之彈性橫樑，順著端點以  $-v_0$  之速度移動。若一端突然使之靜止，而另一端仍為自由端，(a)根據此題，解釋下列各項之意義，(b)解此邊界值問題。

$$Y_{tt}(x, t) = a^2 Y_{xx}(x, t) \quad x > 0, t > 0$$

$$Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = -v_0, \quad Y(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Y_x(x, t) = 0$$

答 (b)  $Y(x, t) = \begin{cases} -v_0 x/a, & t > x/a \\ -v_0 t, & t \leq x/a \end{cases}$

### 傳輸線

- 8.33 假設在一半無限大的傳輸線內，其單位長度之電感及電導均可省略，且最初之電壓及電流均為零。在  $t = 0$  時，一固定電壓  $E_0$  加於發送端  $x = 0$  處，

- (a) 證明在任意時間  $t > 0$  時，任意點之電壓為

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{erfc}(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t})$$

- (b) 證明相對於上式之電流為

$$I(x, t) = \frac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{C}{R}} t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t}$$

- 8.34 在 33 題中，證明在任一特定時間  $t$ ，電流之最大值發生於距發送端  $\sqrt{2t/RC}$  處。

- 8.35 在一半無限大之傳輸線內，其單位長度之電阻及電導均可省略，且最初之電壓及電流均為零。在  $t = 0$  時，在發送端  $x = 0$  加上一電壓  $E_0(t)$

- (a) 證明在任意位置  $x > 0$  之電壓為

$$E(x, t) = \begin{cases} E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

- (b) 證明相對於上式之電流為

$$I(x, t) = \begin{cases} \sqrt{C/L} E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

- 8.36 假設在 35 題中的傳輸線中，存在下列關係式  $R/L = G/C$ ，證明電壓為

$$E(x, t) = \begin{cases} e^{-x\sqrt{RG}} E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

和 35 題之結論比較之。又，本題之電流為何？

- 8.37 一傳輸線之發送端為  $x = 0$ ，接收端為  $x = l$ ，且此傳輸線之電阻及電導均可省略。若在發送端加上固定電壓  $E_0$ ，而在接收端為開路（電流為零），假設最初之電壓及電

流均為零，求證在任意時間  $t > 0$  時，任意點  $x$  的電壓及電流為

$$E(x, t) = \frac{E_0 \cosh \sqrt{L/C} (l-x)}{\cosh \sqrt{L/C} l}$$

$$I(x, t) = \frac{E_0 \sqrt{L/C} \sinh \sqrt{L/C} (l-x)}{\cosh \sqrt{L/C} l}$$

(b) 在上式中，電壓及電流均和  $t$  無關，這代表什麼意義？

8.38 (a) 若在 37 題中，電阻和電容可省略，但電感及電導不可省略，證明

$$E(x, t) = E_0 \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2l\sqrt{LC}} \right\}$$

(b) 和上式對應之電流為何？討論以上所得級數之收斂性，並解釋其意義。

### 其他各類問題

8.39 (a) 解邊界值問題

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2x \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$U(0, t) = 0, \quad U(1, t) = 0, \quad U(x, 0) = x - x^2$$

(b) (a) 之問題的物理意義為何？

$$\text{答 } U(x, t) = x(1-x) - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-n^2 \pi^2 t}}{n^3} \right) \sin n\pi x \quad \text{或} \quad U(x, t) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 t}}{n^3} \sin n\pi x$$

8.40 若已知條件  $U(0, t) = 0$  改為  $U_x(0, t) = 0$ ，試重做 39 題。

$$\text{答 } U(x, t) = \frac{5}{3} - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4}}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

$$- \frac{64}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4}}{(2n-1)^4} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

8.41 一物質介於  $0 < x < l$ ，且最初之溫度為零。在平面  $x = 0$  之溫度為  $U(0, t) = G(t)$ ， $t > 0$ ，而在  $x = l$  之溫度則保持為零度。證明在任意時間  $t$  時，任意點  $x$  之溫度為

$$U(x, t) = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \int_0^t e^{-n^2 \pi^2 u/l^2} G(t-u) du \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

8.42 若在  $x = l$  處絕熱，試重做 41 題。

8.43 證明在解包含方程式  $\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  的邊界值問題時，相當於先解方程式  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ，再以

296 第八章 在邊界值問題方面的應用

$kt$  取代答案中的  $t$ ，即為原式之解。

- 8.44 一物質介於  $0 < x < l$ ，其端點之溫度均為零，且最初之溫度為  $F(x)$  證明在任意時間  $t$ ，任意點  $x$  的溫度為

$$U(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2\pi^2 t/l^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l F(u) \sin \frac{n\pi u}{l} du$$

- 8.45 求一有界解滿足下式

$$x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = xe^{-y} \quad 0 < x < 1, y > 0$$

$$\Phi(x, 0) = x, \quad 0 < x < 1 \quad \Phi(x, y) = xe^{-y}(1+y)$$

- 8.46 一細繩拉緊後固定於  $x = 0$  及  $x = l$ ，並將其中點向下拉，使其位移為  $D$ ，然後釋放之。試求在任意時間  $t$  時，任意點  $x$  偏移平衡點之位移為何？

$$\text{答 } Y(x, t) = \frac{8D}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}$$

- 8.47 若在一傳輸線問題中，其單位長度之電感及電導均可省略，試證此問題相當於熱傳導問題。

- 8.48 解邊界值問題

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + x \frac{\partial Y}{\partial x} + Y = x \quad x > 0, t > 0$$

$$\text{其中 } Y(0, t) = 0, Y(x, 0) = 0. \quad \text{答 } Y(x, t) = \frac{1}{2}x(1 - e^{-2t})$$

- 8.49 證明在解包含方程式  $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$  之邊界值問題時，相當於先解方程式  $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ，再以  $at$  取代答案中的  $t$ ，即為原式之解。

- 8.50 若在一傳輸線問題中，其電阻及電導均可省略，試證此問題相當於繩之振動問題。

- 8.51 一細繩拉緊後固定於  $x = 0$  及  $x = l$ ，在端點  $x = 0$  受到外力，形成位移  $Y(0, t) = F(t)$ ，其中  $F(t)$  為已知的時間函數，而在另一端點  $x = l$  則固定不動。求其橫位移。

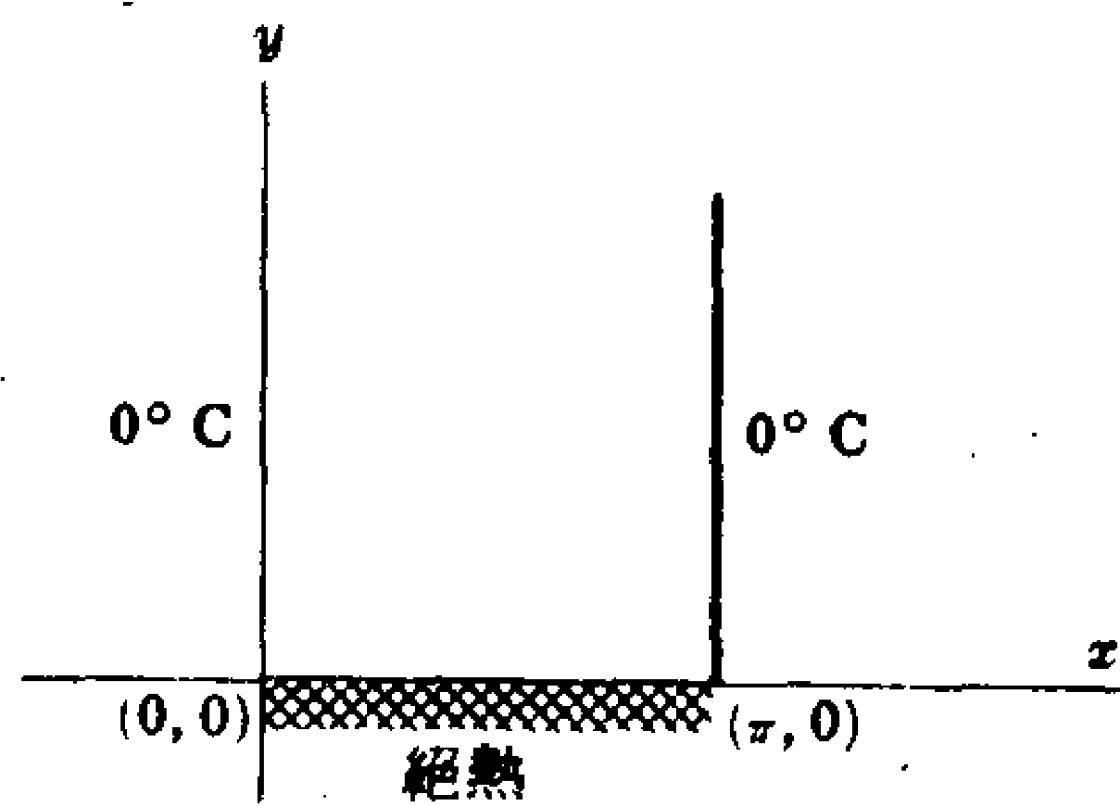


圖 8-14

- 8.52 一半無限大之平板，寬度為  $\pi$ （見圖 8-14），其表面均絕熱。在半無限大邊線之溫度

保持在  $0^\circ\text{C}$ ，而在有限大邊線為絕熱。若最初之溫度為  $100^\circ\text{C}$ ，求任意時間任意點之溫度。

- 8.53 一物質介於  $0 < x < l$ ，其最初溫度為  $U_0$ ，而在端點  $x = 0$  及  $x = l$  則保持為零度。證明在任意時間  $t$  時，任意點  $x$  之溫度為

$$U(x, t) = U_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{nl-x}{2\sqrt{kt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{nl+x}{2\sqrt{kt}}\right) \right\}$$

- 8.54 一橫樑在其端點  $x = 0$  及  $x = l$  均為鉸支承。在  $t = 0$  時，一集中之橫負載大小為  $w$ ，突然施於其中點，證明在其後任意時間  $t > 0$  時，橫樑上任意點  $x$  之橫位移為

$$Y(x, t) = \frac{wx}{12EI}(\frac{3}{4}l^2 - x^2) - \frac{2wl^3}{\pi^4 EI} \left\{ \frac{\sin \pi x/l}{1^4} + \frac{\sin 3\pi x/l}{3^4} + \frac{\sin 5\pi x/l}{5^4} + \dots \right\}$$

其中  $0 < x < l/2$ 。  $l/2 < x < l$  之位移可由對稱性而得。

- 8.55 證明邊界值問題

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2 U & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ U(0, t) &= U_1, \quad U(l, t) = U_2, \quad U(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

之解為

$$U(x, t) = \frac{U_1 \sinh \alpha(l-x) + U_2 \sinh \alpha x}{\sinh \alpha l} + \frac{2\pi}{l^2} e^{-\alpha^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-n^2 \pi^2 t/l^2} (U_2 \cos n\pi - U_1)}{\alpha^2 + n^2 \pi^2/l^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- 8.56 證明 55 題可解釋為熱傳導問題，即一棒長  $l$ ，向其週圍散發熱量之問題。
- 8.57 一橫向力  $F(x) = x(\pi - x)$  施於兩端  $x = 0$  及  $x = \pi$  均為鉸支承的橫樑，若最初之橫位移及速度均為零，求其後任意時間  $t$  之橫位移。
- 8.58 在一半無限長之傳輸線中，假設其每單位長度之電感及電導均可省略，且在其發送端  $x = 0$  加上一電壓  $E(0, t) = E_0 \cos \omega t$ ， $t > 0$ ，若最初之電壓及電流均為零，(a) 證明在一長時間之後，在任意點  $x$  之電壓為

$$E(x, t) = E_0 e^{-\sqrt{\omega RC/2} x} \cos(\omega t - \sqrt{\omega RC/2} x)$$

及(b)證明相對上式之電流為

$$I(x, t) = E_0 \sqrt{\omega C/R} e^{-\sqrt{\omega RC/2} x} \cos(\omega t - \sqrt{\omega RC/2} x - \pi/4)$$

- 8.59 一半無限長之細繩固定於端點  $x = 0$ 。且最初靜止於  $x$  軸。在  $t = 0$  時，繩上任意點  $x$  所具有的速度為  $F(x)$ ， $x > 0$ ，求任意時間  $t > 0$  時，任意點  $x$  之位移。
- 8.60 一集中橫向力  $F = F_0 \sin \omega t$ ， $t > 0$  施於一橫樑之中點，而此橫樑之兩端點  $x = 0$  及



$x = l$  均為鉸支承。證明其橫位移為

$$Y(x, t) = \frac{bF_0 \sin \omega t}{4EI} \sqrt{\frac{b}{\omega}} \left\{ \frac{\sin x\sqrt{\omega/b}}{\cos l\sqrt{\omega/2b}} - \frac{\sinh x\sqrt{\omega/b}}{\cosh l\sqrt{\omega/2b}} \right\} \\ - \frac{2bF_0 l}{\pi^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi/2}{n^2(\omega^2 - b^2 n^4 \pi^4/l^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{bn^2 \pi^2 t}{l^2}$$

其中  $0 < x < l/2$ 。  $l/2 < x < l$  之位移可由對稱性而得。討論  $\omega = bn^2 \pi^2/l^2$ ， $n = 1, 2, 3 \dots$  之物理意義。

- 8.61 在圖 8-15 的方塊中，若其表面均絕熱，且四邊的溫度均保持在  $0^\circ\text{C}$ ，求此方塊的穩態（最終）溫度。

圖

$$U(x, y) = \frac{4T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x \sinh(2n-1)\pi(1-y)}{(2n-1) \sinh(2n-1)\pi}$$

- 8.62 若四邊的溫度分別保持為  $T_1, T_2, T_3, T_4$ ，試重做 61 題。

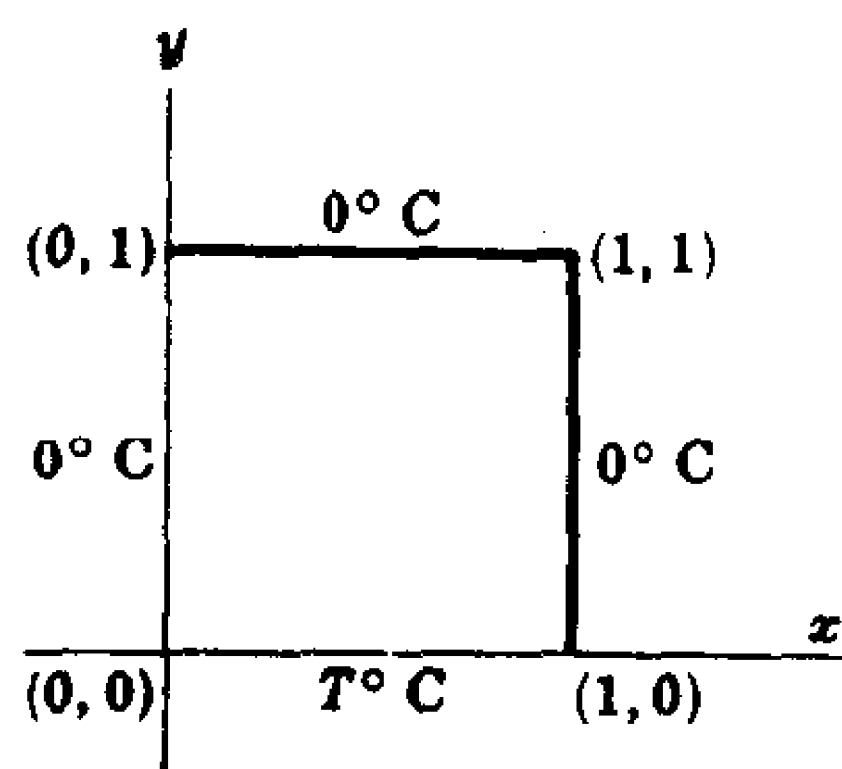


圖 8-15

- 8.63 假設在 62 題中，最初之溫度為  $0^\circ\text{C}$ ，求其後任意時間時，方塊內任意點之溫度為何？

- 8.64 一橫樑長  $l$ ，端點  $x = l$  為固定端。 $t = 0$  時，端點  $x = 0$  之縱位移為  $D$ ，並由此釋放之。證明其後任意時間  $t > 0$  時，任意點  $x$  之縱位移為

$$Y(x, t) = D \left\{ u(t - x/a) - u\left(t - \frac{2l-x}{a}\right) + u\left(t - \frac{2l+x}{a}\right) - \dots \right\}$$

其中  $u$  為黑佛塞單位階梯函數。以圖形討論上式。

- 8.65 兩半無限大之導熱物質， $x < 0$  及  $x > 0$ （見圖 8-16），具有固定之熱傳導係數及擴散係數，分別是  $K_1, k_1, K_2, k_2$ 。最初此兩物質之溫度均為  $U_1$  及  $U_2$ ，證明在任意時間  $t$  時，任意位置  $x > 0$  之溫度為

$$U(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{1 + \alpha} \left\{ 1 + \alpha \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_2 t}}\right) \right\}$$

其中  $\alpha = K_1 \sqrt{k_2} / K_2 \sqrt{k_1}$

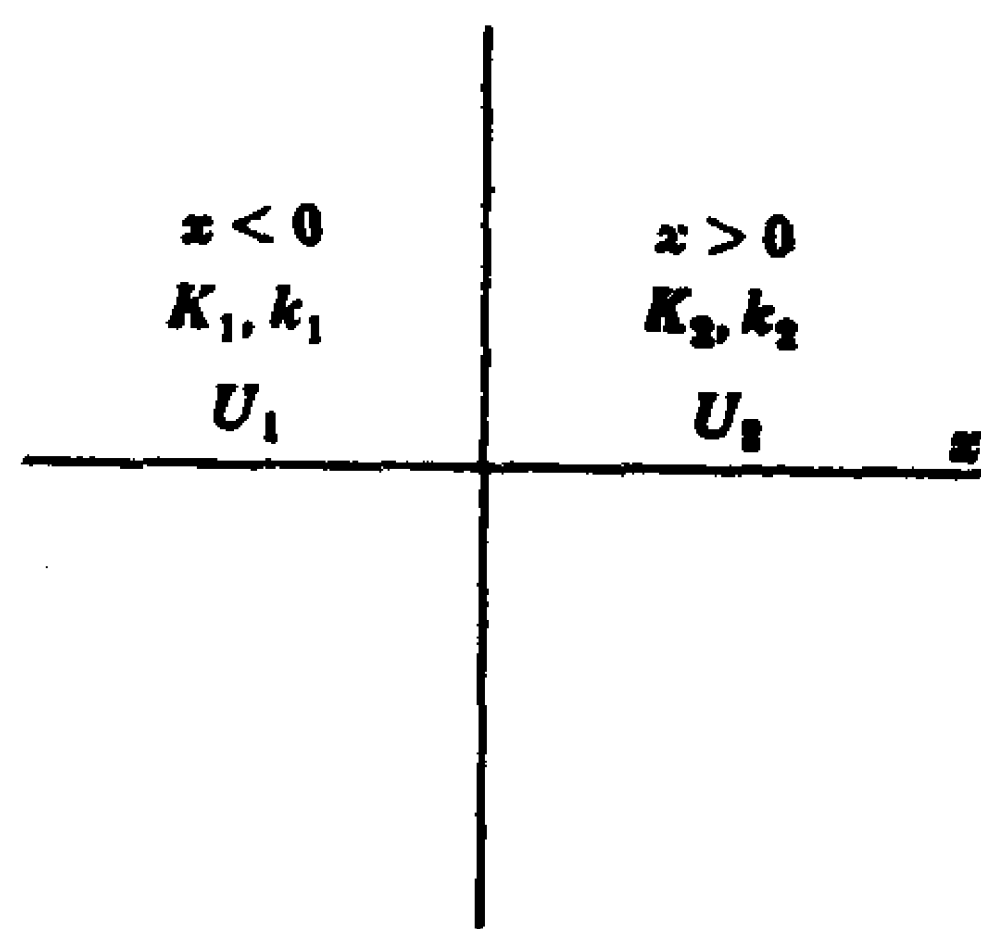


圖 8-16

提示：熱傳導方程式為  $\frac{\partial U}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$   $x < 0$

及  $\frac{\partial U}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $x > 0$  且我們已知  $\lim_{x \rightarrow 0^-} U(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} U(x, t)$  及  $\lim_{x \rightarrow 0^-} K_1 U_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} K_2 U_x(x, t)$

- 8.67 一無限長之圓柱體，半徑為 1，最初之溫度為零。若一固定熱流  $A$  施於圓柱體之凸面（即側面），證明在任何時間  $t$  時，離中心軸為  $r$  之處的溫度

$$U(r, t) = \frac{A}{4k} \{1 - 8kt - 2r^2\} + \frac{2A}{k} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\lambda_n^2 t} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)}$$

其中  $\lambda_n$  為  $J_0(\lambda) = 0$  的正根。

- 8.68 一圓柱體之半徑及高均為 1，在圓形面（上下底之平面）之溫度保持為零度，而在凸面（側面）之溫度保持為  $U_0$ ，假設此圓柱體之中心軸和  $z$  軸重合，證明離中心軸  $r$  處，且離一底  $z$  處之穩態溫度為

$$U(r, z) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi z}{2n-1} \frac{I_0\{(2n-1)\pi r\}}{I_0\{(2n-1)\pi\}}$$

- 8.69 (a) 解下列邊界值問題

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \quad 0 < x < l, t > 0$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(l, t) = 0, \quad Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0, \quad Y_{xx}(l, t) = 0, \quad EIY_{xx}(0, t) = P_0 \sin \omega t$$

- (b) 解釋(a)之問題之物理意義。

$$\begin{aligned} \text{答 (a)} \quad Y(x, t) &= \frac{bP_0 \sin \omega t}{2EI\omega} \left\{ \frac{\sinh(l-x)\sqrt{\omega/b}}{\sinh l\sqrt{\omega/b}} - \frac{\sin(l-x)\sqrt{\omega/b}}{\sin l\sqrt{\omega/b}} \right\} \\ &+ \frac{2\omega P_0 b}{\pi EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x/l \sin bn^2 x^2 t/l^2}{n(\omega^2 - b^2 n^4/l^4)} \end{aligned}$$

- 8.70 一單位電感可忽略之半無限長傳輸線，最初之電壓及電流均為零。在  $t = 0$  時，於發送端加上一固定電壓  $E_0$ ，證明在任意時間  $t > 0$  時，任意點  $x > 0$  之電壓為

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \frac{1}{2}E_0 \left\{ e^{-x\sqrt{GR}} \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{Gt}{C}} - \frac{1}{2}x\sqrt{\frac{RC}{t}} \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{x\sqrt{GR}} \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{Gt}{C}} + \frac{1}{2}x\sqrt{\frac{RC}{t}} \right) \right\} - E_0 \cosh x\sqrt{GR} \end{aligned}$$

其相對之電流為何？



# 附 錄 A

拉卜拉士變換的一般性質表

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

	$f(s)$	$F(t)$
1.	$a f_1(s) + b f_2(s)$	$a F_1(t) + b F_2(t)$
2.	$f(s/a)$	$a F(at)$
3.	$f(s-a)$	$e^{at} F(t)$
4.	$e^{-as} f(s)$	$u(t-a) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$
5.	$s f(s) - F(0)$	$F'(t)$
6.	$s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$	$F''(t)$
7.	$s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - F^{(n-1)}(0)$	$F^{(n)}(t)$
8.	$f'(s)$	$-t F(t)$
9.	$f''(s)$	$t^2 F(t)$
10.	$f^{(n)}(s)$	$(-1)^n t^n F(t)$
11.	$\frac{f(s)}{s}$	$\int_0^t F(u) du$
12.	$\frac{f(s)}{s^n}$	$\int_0^t \dots \int_0^t F(u) du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u) du$

	$f(s)$	$F(t)$
13.	$f(s) g(s)$	$\int_0^t F(u) G(t-u) du$
14.	$\int_s^\infty f(u) du$	$\frac{F(t)}{t}$
15.	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-su} F(u) du$	$F(t) = F(t+T)$
16.	$\frac{f(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-u^2/4t} F(u) du$
17.	$\frac{1}{s} f(1/s)$	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut}) F(u) du$
18.	$\frac{1}{s^{n+1}} f(1/s)$	$t^{n/2} \int_0^\infty u^{-n/2} J_n(2\sqrt{ut}) F(u) du$
19.	$\frac{f(s+1/s)}{s^2+1}$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)}) F(u) du$
20.	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-3/2} e^{-s^2/4u} f(u) du$	$F(t^2)$
21.	$\frac{f(\ln s)}{s \ln s}$	$\int_0^\infty \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)} du$
22.	$\frac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s)$ = 次數小於 $n$ 的多項式 $Q(s) = (s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)$ 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均不相同。	$\sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}$

# 附 錄 B

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	$t$
3.	$\frac{1}{s^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
4.	$\frac{1}{s^n} \quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
5.	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$
6.	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
7.	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n > 0$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{\Gamma(n)}$
8.	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
9.	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
10.	$\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$	$\frac{e^{bt} \sin at}{a}$
11.	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
12.	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
13.	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
14.	$\frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$	$\frac{e^{bt} \sinh at}{a}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
15.	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh at$
16.	$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$
17.	$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}$
18.	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin at - at \cos at}{2a^3}$
19.	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \sin at}{2a}$
20.	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin at + at \cos at}{2a}$
21.	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2}at \sin at$
22.	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
23.	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{at \cosh at - \sinh at}{2a^3}$
24.	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t \sinh at}{2a}$
25.	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{\sinh at + at \cosh at}{2a}$
26.	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2}at \sinh at$
27.	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cosh at$
28.	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(3 - a^2 t^2) \sin at - 3at \cos at}{8a^5}$
29.	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t \sin at - at^2 \cos at}{8a^3}$
30.	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(1 + a^2 t^2) \sin at - at \cos at}{8a^3}$
31.	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{3t \sin at + at^2 \cos at}{8a}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
32.	$\frac{s^4}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(3 - a^2 t^2) \sin at + 5at \cos at}{8a}$
33.	$\frac{s^5}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(8 - a^2 t^2) \cos at - 7at \sin at}{8}$
34.	$\frac{3s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t^2 \sin at}{2a}$
35.	$\frac{s^3 - 3a^2 s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cos at$
36.	$\frac{s^4 - 6a^2 s^2 + a^4}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{1}{6} t^3 \cos at$
37.	$\frac{s^3 - a^2 s}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{t^3 \sin at}{24a}$
38.	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh at - 3at \cosh at}{8a^3}$
39.	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{at^2 \cosh at - t \sinh at}{8a^3}$
40.	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{at \cosh at + (a^2 t^2 - 1) \sinh at}{8a^3}$
41.	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{3t \sinh at + at^2 \cosh at}{8a}$
42.	$\frac{s^4}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh at + 5at \cosh at}{8a}$
43.	$\frac{s^5}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(8 + a^2 t^2) \cosh at + 7at \sinh at}{8}$
44.	$\frac{3s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{t^2 \sinh at}{2a}$
45.	$\frac{s^3 + 3a^2 s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cosh at$
46.	$\frac{s^4 + 6a^2 s^2 + a^4}{(s^2 - a^2)^4}$	$\frac{1}{6} t^3 \cosh at$
47.	$\frac{s^3 + a^2 s}{(s^2 - a^2)^4}$	$\frac{t^3 \sinh at}{24a}$
48.	$\frac{1}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a^2} \left\{ \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3} at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} + e^{-3at/2} \right\}$



拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
49.	$\frac{s}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a} \left\{ \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}at}{2} - e^{-3at/2} \right\}$
50.	$\frac{s^2}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3} \left( e^{-at} + 2e^{at/2} \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} \right)$
51.	$\frac{1}{s^3 - a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2} \left\{ e^{3at/2} - \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}at}{2} \right\}$
52.	$\frac{s}{s^3 - a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a} \left\{ \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} + e^{3at/2} \right\}$
53.	$\frac{s^2}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3} \left( e^{at} + 2e^{-at/2} \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} \right)$
54.	$\frac{1}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{4a^3} (\sin at \cosh at - \cos at \sinh at)$
55.	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\sin at \sinh at}{2a^2}$
56.	$\frac{s^2}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{2a} (\sin at \cosh at + \cos at \sinh at)$
57.	$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$\cos at \cosh at$
58.	$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^3} (\sinh at - \sin at)$
59.	$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^2} (\cosh at - \cos at)$
60.	$\frac{s^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a} (\sinh at + \sin at)$
61.	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\cosh at + \cos at)$
62.	$\frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
63.	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{\operatorname{erf} \sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
64.	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$	$\frac{e^{at} \operatorname{erf} \sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
65.	$\frac{1}{\sqrt{s-a} + b}$	$e^{at} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - b e^{b^2 t} \operatorname{erfc}(b\sqrt{t}) \right\}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
66.	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
67.	$\frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}}$	$I_0(at)$
68.	$\frac{(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^n}{\sqrt{s^2 + a^2}} \quad n > -1$	$a^n J_n(at)$
69.	$\frac{(s - \sqrt{s^2 - a^2})^n}{\sqrt{s^2 - a^2}} \quad n > -1$	$a^n I_n(at)$
70.	$\frac{e^{bt} (s + \sqrt{s^2 + a^2})}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
71.	$\frac{e^{-b\sqrt{s^2 + a^2}}}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$\begin{cases} J_0(a\sqrt{t^2 - b^2}) & t > b \\ 0 & t < b \end{cases}$
72.	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$	$\frac{t J_1(at)}{a}$
73.	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$	$t J_0(at)$
74.	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$	$J_0(at) - at J_1(at)$
75.	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$	$\frac{t I_1(at)}{a}$
76.	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$	$t I_0(at)$
77.	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^{3/2}}$	$I_0(at) + at I_1(at)$
78.	$\frac{1}{s(e^s - 1)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}$ 參見第 141 條。	$F(t) = n, \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
79.	$\frac{1}{s(e^s - r)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$	$F(t) = \sum_{k=1}^{[t]} r^k$ 其中 $[t]$ = 小於或等於 $t$ 的最大整數
80.	$\frac{e^s - 1}{s(e^s - r)} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$ 參見第 143 條。	$F(t) = r^n, \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
81.	$\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
82.	$\frac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\frac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
83.	$\frac{e^{-a/s}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\left(\frac{t}{a}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{at})$
84.	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
85.	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$
86.	$\frac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$
87.	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$
88.	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$	$e^{b(bt+a)} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
89.	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t} a^{2n+1}} \int_0^x u^n e^{-u^2/4a^2t} J_{2n}(2\sqrt{u}) du$
90.	$\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$
91.	$\frac{\ln[(s^2 + a^2)/a^2]}{2s}$	$\operatorname{Ci}(at)$
92.	$\frac{\ln[(s+a)/a]}{s}$	$\operatorname{Ei}(at)$
93.	$-\frac{(\gamma + \ln s)}{s}$ $\gamma = \text{奧衣勒常數} = .5772156 \dots$	$\ln t$
94.	$\ln\left(\frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}\right)$	$\frac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$
95.	$\frac{\pi^2}{6s} + \frac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$ $\gamma = \text{奧衣勒常數} = .5772156 \dots$	$\ln^2 t$
96.	$\frac{\ln s}{s}$	$-(\ln t + \gamma)$ $\gamma = \text{奧衣勒常數} = .5772156 \dots$
97.	$\frac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t + \gamma)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$ $\gamma = \text{奧衣勒常數} = .5772156 \dots$

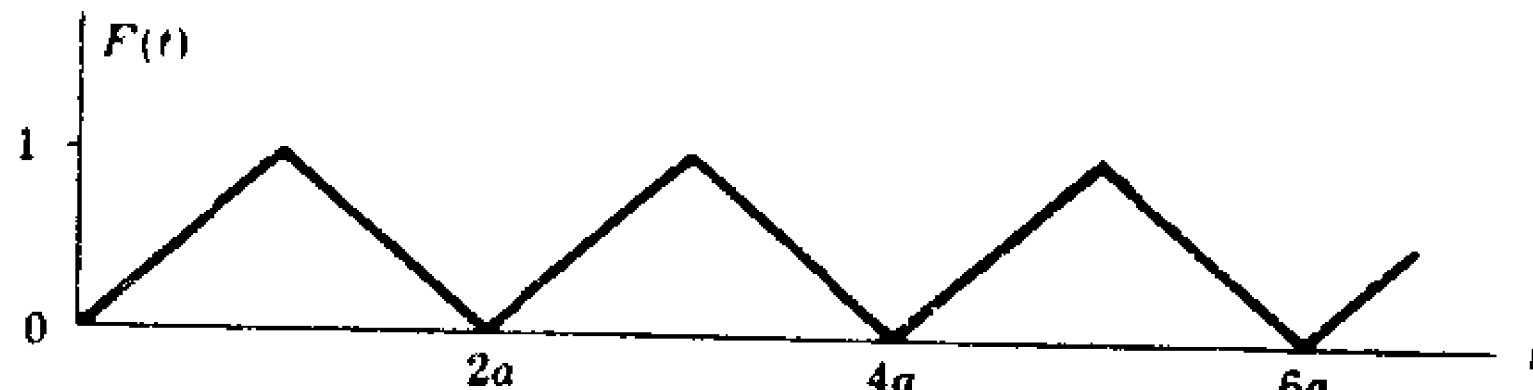
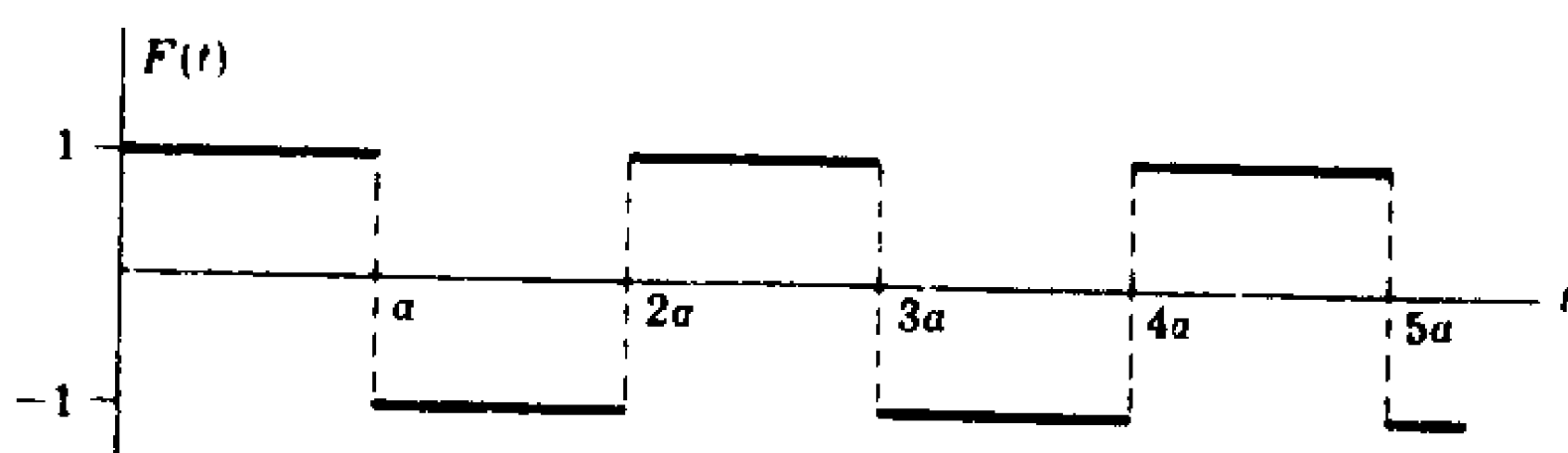
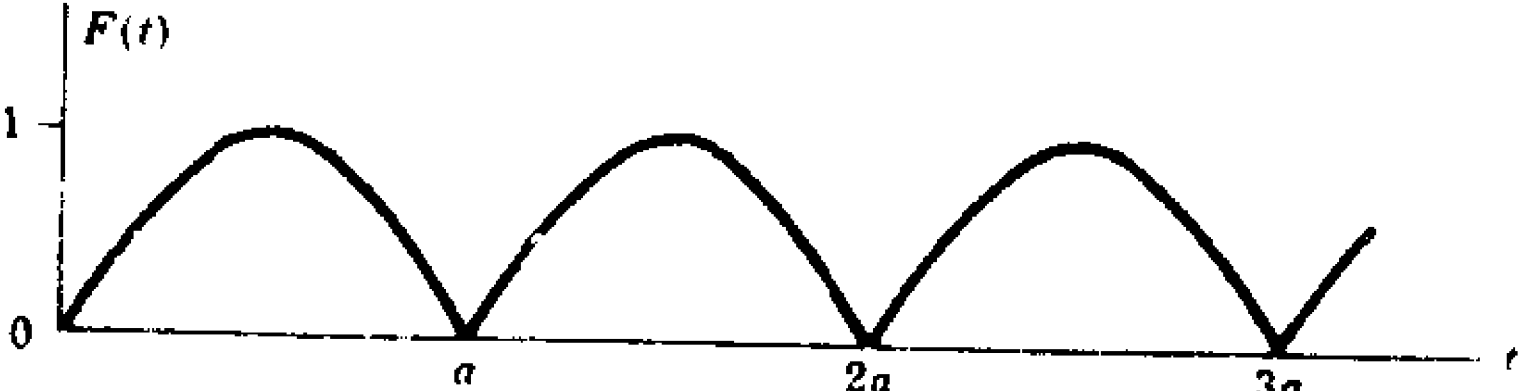
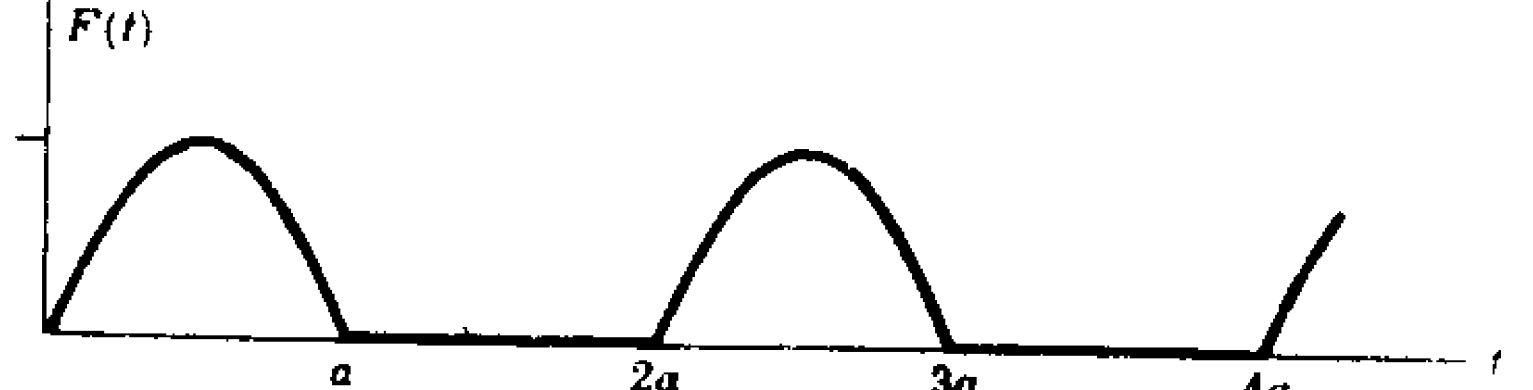
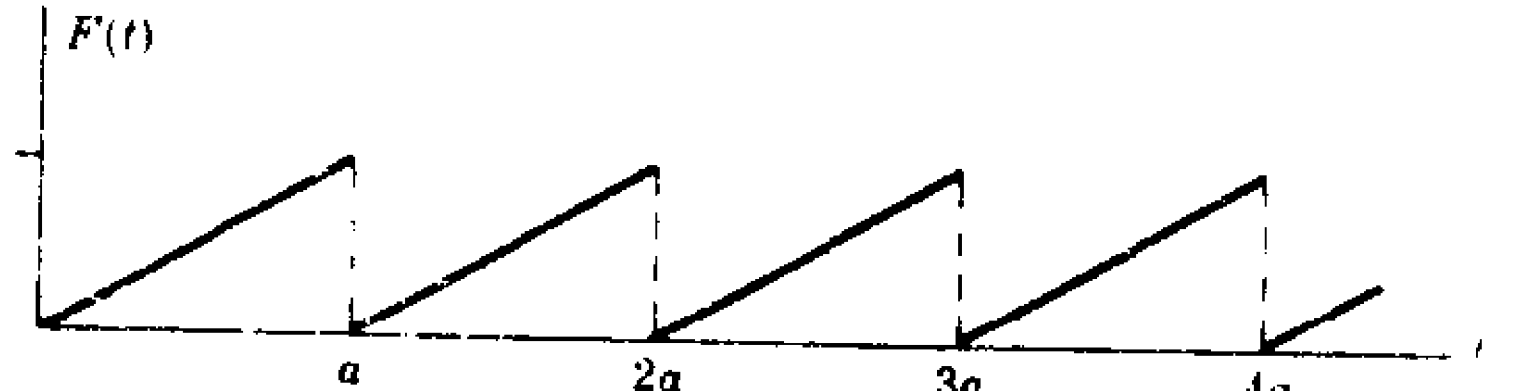
拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
98.	$\frac{\Gamma'(n+1) - \Gamma(n+1) \ln s}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$t^n \ln t$
99.	$\tan^{-1}(a/s)$	$\frac{\sin at}{t}$
100.	$\frac{\tan^{-1}(a/s)}{s}$	$\text{Si}(at)$
101.	$\frac{e^{at/s}}{\sqrt{s}} \text{erfc}(\sqrt{a/s})$	$\frac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
102.	$e^{s^2/4a^2} \text{erfc}(s/2a)$	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 t^2}$
103.	$\frac{e^{s^2/4a^2} \text{erfc}(s/2a)}{s}$	$\text{erf}(at)$
104.	$\frac{e^{as} \text{erfc} \sqrt{as}}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$
105.	$e^{as} \text{Ei}(as)$	$\frac{1}{t+a}$
106.	$\frac{1}{a} \left[ \cos as \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right\} - \sin as \text{Ci}(as) \right]$	$\frac{1}{t^2 + a^2}$
107.	$\sin as \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right\} + \cos as \text{Ci}(as)$	$\frac{t}{t^2 + a^2}$
108.	$\frac{\cos as \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right\} - \sin as \text{Ci}(as)}{s}$	$\tan^{-1}(t/a)$
109.	$\frac{\sin as \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right\} + \cos as \text{Ci}(as)}{s}$	$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{t^2 + a^2}{a^2} \right)$
110.	$\left[ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(as) \right]^2 + \text{Ci}^2(as)$	$\frac{1}{t} \ln \left( \frac{t^2 + a^2}{a^2} \right)$
111.	0	$\mathcal{N}(t)$
112.	1	$\delta(t)$
113.	$e^{-as}$	$\delta(t-a)$
114.	$\frac{e^{-as}}{s}$ 參見第 139 條。	$u(t-a)$

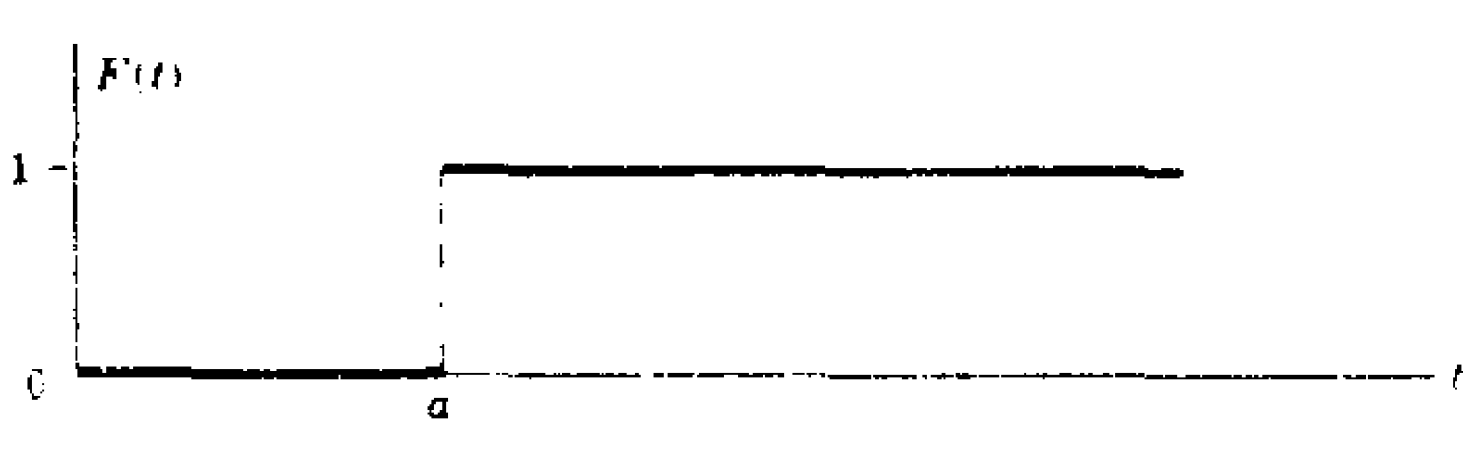
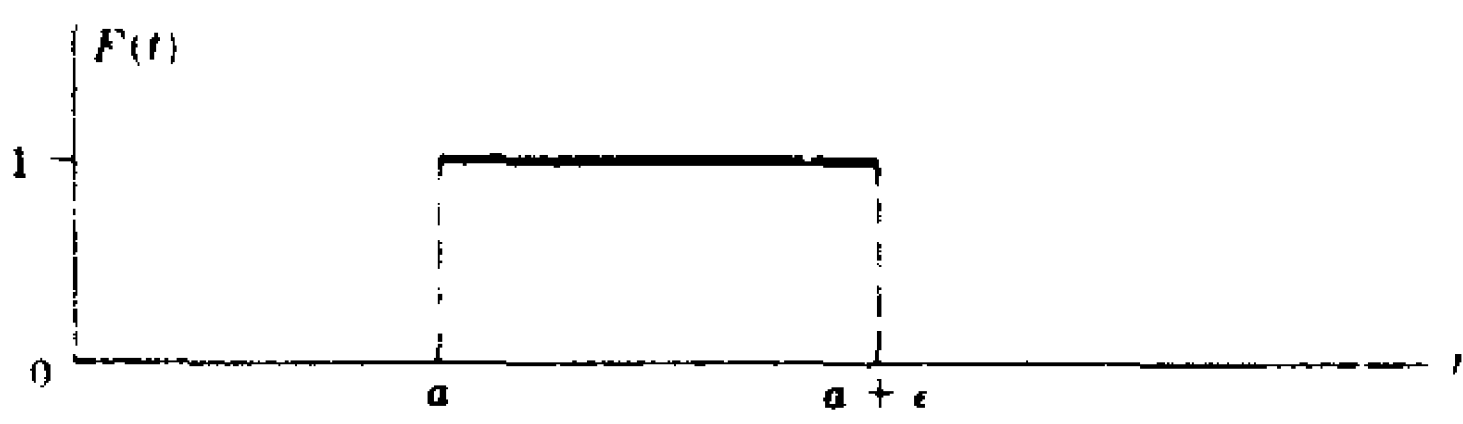

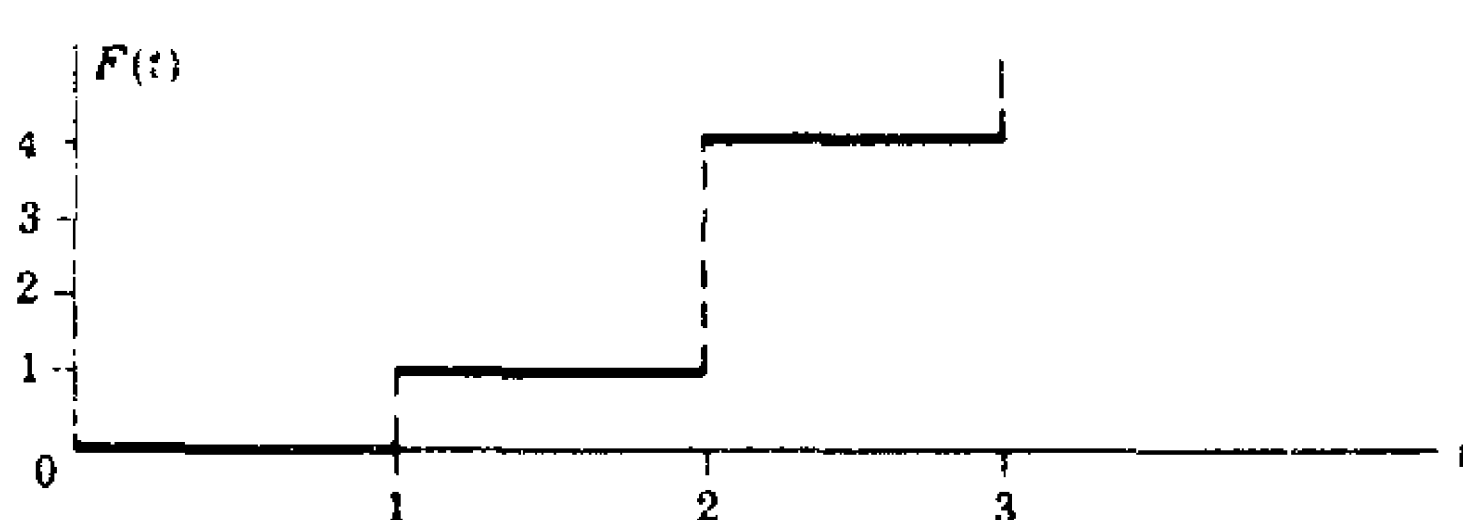
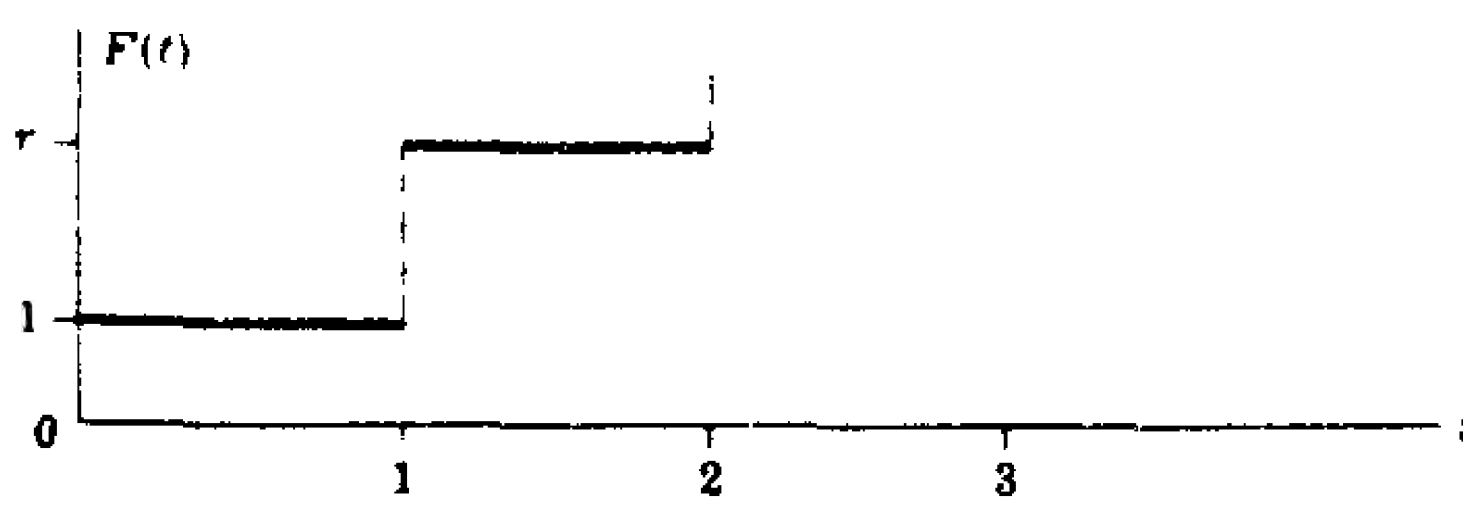
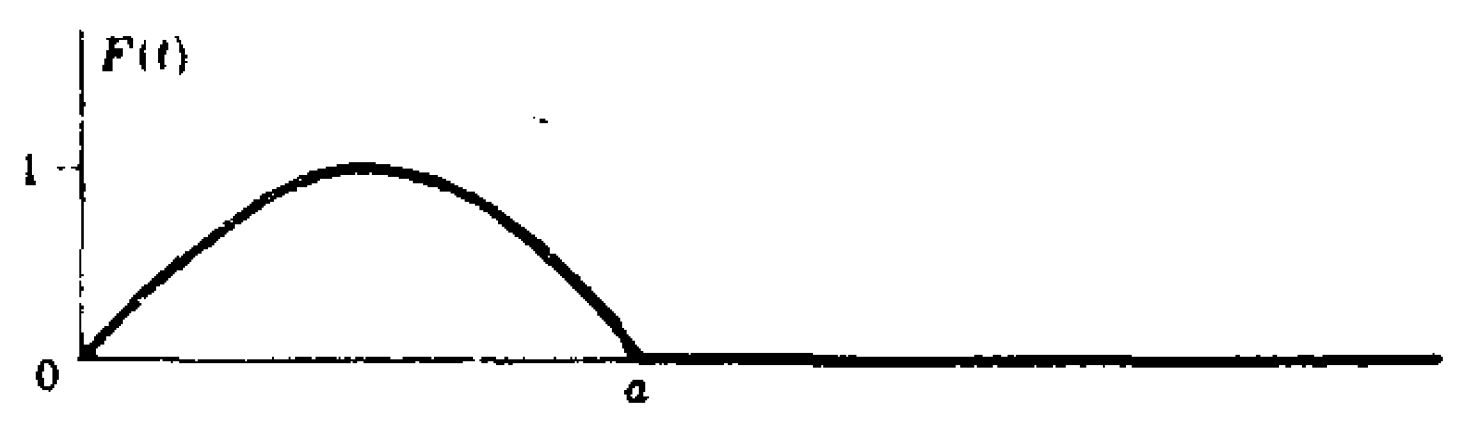
拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
115.	$\frac{\sinh sx}{s \sinh sa}$	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}$
116.	$\frac{\sinh sx}{s \cosh sa}$	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
117.	$\frac{\cosh sx}{s \sinh sa}$	$\frac{t}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$
118.	$\frac{\cosh sx}{s \cosh sa}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
119.	$\frac{\sinh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\frac{xt}{a} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$
120.	$\frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}$	$x + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
121.	$\frac{\cosh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\frac{t^2}{2a} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{n\pi t}{a}\right)$
122.	$\frac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$	$t + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
123.	$\frac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$	$\frac{1}{2}(t^2 + x^2 - a^2) - \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
124.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$
125.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
126.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
127.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \cos \frac{n\pi x}{a}$
128.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s \sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$
129.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
130.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2 \sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{xt}{a} + \frac{2a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} (1 - e^{-n^2\pi^2 t/a^2}) \sin \frac{n\pi x}{a}$
131.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2 \cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{2}(x^2 - a^2) + t - \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
132.	$\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{s J_0(ia\sqrt{s})}$	$1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ <p>其中 <math>\lambda_1, \lambda_2, \dots</math> 為 <math>J_0(\lambda) = 0</math> 的正根</p>
133.	$\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2 J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{1}{2}(x^2 - a^2) + t + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ <p>其中 <math>\lambda_1, \lambda_2, \dots</math> 為 <math>J_0(\lambda) = 0</math> 的正根</p>
134.	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>三角波函數</p> 
135.	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>方波函數</p> 
136.	$\frac{\pi a}{a^2 s^2 + \pi^2} \coth\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>整流正弦波函數</p> 
137.	$\frac{\pi a}{(a^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}$	<p>半波整流正弦波函數</p> 
138.	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	<p>鋸齒波函數</p> 

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
139.	$\frac{e^{-as}}{s}$ 參見第 114 條	黑佛塞單位函數 $u(t-a)$ 
140.	$\frac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{s}$	脈波函數 
141.	$\frac{1}{s(1-e^{-as})}$ 參見第 78 條	階梯函數 
142.	$\frac{e^{-s} + e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$F(t) = n^2, \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ 
143.	$\frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ 參見第 80 條	$F(t) = r^n, \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ 
144.	$\frac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2 s^2 + \pi^2}$	$F(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/a) & 0 \leq t \leq a \\ 0 & t > a \end{cases}$ 

# 附 錄 C

## 特殊函數表

1. (伽瑪函數)	$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du, \quad n > 0$
2. (貝他函數)	$B(m, n) = \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m, n > 0$
3. (貝色函數)	$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\}$
4. (修正之貝色函數)	$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right\}$
5. (誤差函數)	$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$
6. (餘誤差函數)	$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-u^2} du$
7. (指數積分)	$\operatorname{Ei}(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$
8. (正弦積分)	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$
9. (餘弦積分)	$\operatorname{Ci}(t) = \int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du$
10. (福來乃耳正弦積分)	$S(t) = \int_0^t \sin u^2 du$
11. (福來乃耳餘弦積分)	$C(t) = \int_0^t \cos u^2 du$
12. (拉各耳多項式)	$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$





# 索引

## A

abel's integral equation 阿貝爾積分  
分方程式 138, 144, 145  
absolute value 絕對值 167  
amplitude 幅角 168  
analytic part 解析部分 175  
argane diagram 阿干圖形 167

## B

bending moment 彎矩 99  
bessel function 貝色函數 10  
beta function 貝他函數 59  
boundary conditions 邊界條件 271  
boundary-value problem 邊界值問題  
99, 271  
brachistochrone problem 捷線問題  
165  
branch 分枝 170, 205  
branch point 枝點 174  
branch point 分枝點 205  
bromwich's contour 布拉威齊路徑  
249  
bromwich's integral formula  
布拉威齊積分公式 249

## C

canchy's theorem 柯西定理 172  
cantilever beam 懸臂樑 113  
cauchy's integral fromula  
柯西積分公式 173

cauchy-riemann equation

柯西 - 里曼方程式 171

circuit elements 電路元件 97

complex conjugate 共軛複數 167

complex inversion integral or form-  
ula 複數反變換積分或公式 249

complex plane 複數平面 167

conformal mapping function

保角映象函數 204

conformal property 保角性質 204

conformal transformation 保角轉換  
204

converge 收斂 1

convolution theorem for fourier  
transforms 傅氏變換的褶積定理  
220

convolution theorem or property  
褶積定理或性質 58

convolution type 褶積型 137

coupled inductively 電感性耦合 135

covolution 褶積 58

critically damped motion 臨界阻滯  
運動 109

cycloid 擺線 138

## D

damped oscillatory 阻滯振盪 108

damping constant 阻滯常數 96

damping force 阻滯力 96

de moivre's theorem 棣馬弗定理  
168

### 316 索引

deflection curve 撓度曲線 99  
derivative 導式 170  
difference equation 差分方程式  
138  
differential-difference equation  
微分差分方程式 139  
diffusivity 擴散係數 118, 271  
dirichlet conditions 狄里西雷條件  
215  
double inversion 雙重反變換 274  
double pole 雙重極點 174

### E

elastic curve 彈性曲線 99  
equation for heat conduction  
熱傳導方程式 118  
essential singularity 本性奇點  
175, 193  
euler's formula 奧衣勒公式 168  
exponential order 指數級 3

### F

factorial function 階乘函數 10  
faltung 費通 58  
fibonacci numbers 費布那希數字  
162  
finite fourier cosine transform  
有限傅氏餘弦變換 217  
finite fourier sine transform  
有限傅氏正弦變換 217  
flexural rigidity 彎度剛性 99  
fourier integral 傅氏積分 218  
fourier integral expansion  
傅氏積分展開 218  
fourier series 傅立葉級數 215

fourier transform 傅立葉變換 219  
fourier's integral theorem  
傅氏積分定理 218  
fredholm integral equation  
佛瑞德哈姆積分方程式 137, 142

### G

gamma function 伽瑪函數 10  
generation function 形成函數 11  
green's theorem in the plane  
平面革忍定理 172

### H

harmonic functions 諧和函數 171  
heaviside expansion formula  
黑佛塞展開公式 59  
heaviside's expansion theorem or  
formula 黑佛塞展開定理或公式 59  
hooke's law 虎克定律 96

### I

image 像 203  
imaginary part 虛部 167, 169  
imaginary unit 虛數單位 167  
infinite fourier sine transform  
無限傅立葉正弦變換 219  
infinite fourier cosine transform  
無限傅立葉餘弦變換 219  
integro-differential equation  
積分-微分方程式 138  
inverse finite fourier cosine  
transform 反有限傅氏餘弦變換  
217  
inverse finite fourier sine trans-  
form 反有限傅氏正弦變換 217

215/222 1-0 15.1

inverse fourier cosine transform

反傅立葉餘弦變換 220

inverse fourier sine transform

反傅立葉正弦變換 219

inverse fourier transform 反傅立葉

變換 219

inverse laplace transform 反拉卜拉

士變換 53

inverse laplace transfromation

operator 反拉卜拉士變換運算子 53

inversion formula 反變換公式 219

isolated singularity 孤立奇點 174

## J

jacobian of the transformation

亞克比行列式 212

jump 躍斷 6

## L

laplace's equation 拉卜拉士方程式

171

laurent's series 洛冉級數 175

line integral 線積分 171

linear operator 線性運算子 4

## M

many-valued 多值 169

mapping 映像 203

multiple-valued 多重值 169

## N

natural frequency 自然頻率 108

newton's law 牛頓定理 96

non-analytic 不可解析 181

non-oscillatory 不振盪 108

## O

overdamped motion 過阻滯運動

109

## P

parallelogram law 平行四邊形法則

206

parseval's identity 巴塞維恒等式

217

polar coordinates 極座標 168

polar form 極式 168

pole of infinite order 無限階極點

175

pole of order  $n$   $n$ 階級點 174

principal brance 主分枝 180

principal part 主要部分 175

principal value 主值 180

## Q

quadratic equation 二次方程式 178

## R

ratio test 比值審檢法 191

real part 實部 167, 169

recursion fromuls 遞迴公式 151

removable singularity 可去奇點

174

residue theorem 留數定理 176

resonance 共振 120

resonance frequency 共振頻率 120

restoring force 回復力 96

riemann's theorem 里曼定理 217

## S

simple closed curve 簡單封閉曲線

318 索引

171

simple pole 單極點 174

single-valued 單值 169

singular point 奇點 174

solving 解 138

spring constant 彈簧常數 96

steady state part 穩態部分 111

steady-state terms 穩態項 111

stream function 流線函數 183

strling's formula 司徒令公式 10

T

tautochrone problem 等時問題 138

tautochrone property 等時性質 165

taylor's series 泰勒級數 173

taylor's theorem 泰勒定理 193

transient part 暫態部份 111

transient terms 暫態項 111

V

velocity potential 速度勢 183

vertical shear 垂直剪力 99

volterra integral equation 沃太拉  
積分方程式 137, 142

W

weierstrass M test 瓦士曲士M測試法  
192

[ General Information]

□□=□□□□(□□)□□□□□

□□=( )□□□□( Spiegel □ M. R. ) □

□□=318

SS□=10069726

□□□□=